Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
18.02.2025

Analysis und Lineare Algebra I
(Studiengang Wirtschaftspädagogik)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$3^{n+1} \quad \geq \quad n^2 + 1 \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Der Beweis muss durch vollständige Induktion geführt werden. Es ist unzulässig, einen direkten Beweis anzugeben.

Lösung:
Induktionsanfang: Es gilt $3^{1+1} = 9 \geq 2 = 1^2 + 1$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $3^{n+1} \geq n^2 + 1$ voraus *(Induktionsvoraussetzung)*. Dann folgt

$$\begin{aligned} 3^{(n+1)+1} \quad &= \quad 3 \cdot 3^n \quad \overset{(*)}{\geq} \quad 3 \cdot (n^2 + 1) \quad = \quad 3n^2 + 3 \quad = \quad n^2 + 2n^2 + 3 \\ &\geq \quad n^2 + 2n + 3 \quad \geq \quad n^2 + 2n + 2 \quad = \quad (n^2 + 2n + 1) + 1 \quad = \quad (n+1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Dabei wurde an der Stelle (*) die Induktionsvoraussetzung verwendet.

alternative Vorgehensweise:
Zunächst überprüft man wie oben mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung die Ungleichung $3^{(n+1)+1} \geq 3n^2 + 3$. Anschließend bildet man die Ungleichungskette

$$(n+1)^2 + 1 \quad = \quad (n^2 + 2n + 1) + 1 \quad = \quad n^2 + 2n + 2 \quad \leq \quad n^2 + 2n^2 + 3 \quad = \quad 3n^2 + 3.$$

Insgesamt erhält man so $3^{(n+1)+1} \geq 3n^2 + 3 \geq (n+1)^2 + 1$.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit 7 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{4}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{3}x_3 & = & \bar{1} \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{2}x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie die sieben Elemente der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

Lösung:

zu (a)

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

zu (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

zu (c) Die Kennzahlen der normierten Zeilenstufenform sind $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$. An der letzen Spalte kann der spezielle Lösungsvektor $(\bar{5}, \bar{3}, \bar{0})$ abgelesen werden. Wegen $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$ besitzt der homogene Lösungsraum einen Basisvektor. Auf Grund der dritten Spalte ist dieser gegeben durch $b_3 = (-\bar{3}, -\bar{4}, \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{3}, \bar{1})$. Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{3} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{F}_7 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{3} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{6} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g^{-1}(g(A)) = A$ gilt.

Lösung:

zu (a) Zu zeigen ist, dass f injektiv und surjektiv ist.

Injektivität: Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = f(u, v)$ vorgegeben. Dann gilt

$$f(x,y) = f(u,v) \quad \Rightarrow \quad (x+y, 2x-y) = (u+v, 2u-v) \quad \Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (2x-y = 2u-v)$$
$$\Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (3x = 3u) \quad \Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (x = u) \quad \Rightarrow \quad (y = v) \wedge (x = u) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (u,v).$$

Dabei wurden im dritten Schritt die beiden Gleichungen addiert, und im fünften Schritt die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert.

Surjektivität: Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (a, b)$ existiert. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$f(x,y) = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y, 2x-y) = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y = a) \ \wedge \ (2x-y = b) \quad \Leftrightarrow$$
$$(x+y = a) \ \wedge \ (3x = a+b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y = a) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b) \quad \Leftrightarrow$$
$$(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b + y = a) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b) \quad \Leftrightarrow \quad (y = \tfrac{2}{3}a - \tfrac{1}{3}b) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b).$$

Es gilt also $f(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b) = (a, b)$.

zu (b) „$\subseteq$“ Sei $x \in g^{-1}(g(A))$. Dann folgt $g(x) \in g(A)$. Es gibt also ein $a \in A$ mit $g(x) = g(a)$. Da g injektiv ist, folgt daraus $x = a$, und somit $x \in A$.

„$\supseteq$“ Sei $a \in A$. Dann gilt $g(a) \in g(A)$. Das Element a wird also nach $g(A)$ abgebildet, und nach Definition der Urbildmenge folgt daraus wiederum $a \in g^{-1}(g(A))$.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die folgende Teilmenge.

$$A \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=3 \wedge 2x-z=1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Gleichung $v + U = A$ erfüllt ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tatsächlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: In Teil (b) braucht die Gleichung $v + U = A$ nicht überprüft werden, es genügt die Angabe von v und U.

Lösung:

zu (a) Wäre A ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, dann wäre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ in A enthalten. Es müsste dann $0+0+0=3$ und $2 \cdot 0 - 0 = 1$ gelten. Tatsächlich aber ist keine dieser beiden Gleichungen erfüllt, denn es ist $0 \neq 3$ und $0 \neq 1$.

zu (b) Die Gleichung ist erfüllt für $v = (1,1,1)$ und $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \wedge 2x-z=0\}$.

zu (c) Es gilt $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in U$ wegen $0+0+0=0$ und $2 \cdot 0 - 0 = 0$. Seien nun $u, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $u + w \in U$ und $\lambda u \in U$. Schreiben wir $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$, dann folgen aus $u, w \in U$ die Gleichungen $u_1 + u_2 + u_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 0$ und $2u_1 - u_3 = 2w_1 - w_3 = 0$. Auf Grund der Gleichungen

$$(u_1+w_1)+(u_2+w_2)+(u_3+w_3) \quad = \quad (u_1+u_2+u_3)+(w_1+w_2+w_3) \quad = \quad 0+0 \quad = \quad 0$$

und

$$2(u_1+w_1)-(u_3+w_3) \quad = \quad (2u_1-u_3)+(2w_1-w_3) \quad = \quad 0+0 \quad = \quad 0$$

ist $u + w$ in U enthalten. Ebenso folgt aus den Gleichungen

$$(\lambda u_1)+(\lambda u_2)+(\lambda u_3) \quad = \quad \lambda(u_1+u_2+u_3) \quad = \quad \lambda \cdot 0 \quad = \quad 0$$

und $2(\lambda u_1) - (\lambda u_3) = \lambda(2u_1 - u_3) = \lambda \cdot 0 = 0$, dass auch λu in U liegt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$ über dem Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir wenden das bekannte Verfahren aus der Vorlesung an.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das Ergebnis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{3} & \bar{1} & \bar{4} \\ \bar{4} & \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die folgende Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A \quad = \quad \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

(a) Weisen Sie nach, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\inf(A) = \frac{1}{2}$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $\sup(A) = 1$ gilt.

Lösung:

zu (a) Wäre A ein Intervall, dann müsste für alle $a, b \in A$ und alle $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c < b$ auch $c \in A$ gelten. Die Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ sind in A enthalten, und es gilt (zum Beispiel) $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$. Es gibt aber kein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{n+1} = \frac{3}{5}$, denn aus der Gleichung würde $5n = 3(n+1) \Leftrightarrow 2n = 3 \Leftrightarrow n = \frac{3}{2}$ folgen, im Widerspruch zu $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$. Es gilt also $\frac{3}{5} \notin A$.

zu (b) Wir zeigen, dass sogar $\min(A) = \frac{1}{2}$ gilt. Wie bereits in Teil (a) festgestellt, liegt $\frac{1}{2}$ in A. Außerdem ist $\frac{1}{2}$ eine untere Schranke von A, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1}$ äquivalent zu $2n \geq n+1$ und zu $n \geq 1$, und letztere Ungleichung ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Insgesamt ist $\frac{1}{2}$ also tatsächlich das Minimum von A, und damit auch das Infimum.

zu (c) Die Zahl 1 ist eine obere Schranke von A, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n+1$, und damit auch $\frac{n}{n+1} \leq 1$. Nehmen wir nun an, dass $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A mit $s < 1$ ist. Dann ist auch $s_1 = \max\{0, s\} \in [0, 1[$ eine obere Schranke von A, wegen $s_1 \geq s$. Aber andererseits gilt laut Vorlesung $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$, und es gilt dann insbesondere $\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$.

Wenden wir dies auf $\varepsilon = 1 - s_1 \in \mathbb{R}^+$ an, so erhalten wir $\frac{n}{n+1} > 1 - (1 - s_1) = s_1$. Aber weil s_1 eine obere Schranke von A ist und $\frac{n}{n+1}$ in A liegt, gilt andererseits $\frac{n}{n+1} \leq s_1$. Der Widerspruch zeigt, dass A keine kleinere obere Schranke als 1 besitzt, und es folgt insgesamt $\sup(A) = 1$.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so dass $\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = 0$ gilt und die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert (jeweils mit Nachweis).

(b) Sei nun $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n d_n = -\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_n^2+1} \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

In Teil (b) ist die Verwendung von Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte unzulässig. Arbeiten Sie direkt mit der Definition des Konvergenzbegriffs bzw. der uneigentlichen Konvergenz.

Lösung:

zu (a) Seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = n^2$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_n b_n = \lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt, und ebenso $\lim_n a_n b_n = \lim_n n^2 \cdot \frac{1}{n} = \lim_n n = +\infty$; insbesondere ist die Folge $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also divergent. Zu zeigen ist noch $\lim_n a_n = +\infty$. Sei dazu $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \kappa$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt dann $a_n = n^2 \geq n \geq N > \kappa$.
(In Teil (a) war die Verwendung von Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte zugelassen. Damit hätte man $\lim_n a_n = +\infty$ ebenfalls begründen können.)

zu (b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|\frac{1}{d_n^2+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Wegen $d_n^2 + 1 \geq 1 > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\frac{1}{d_n^2+1} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, und dies wiederum zu $d_n^2 + 1 > \varepsilon^{-1}$ für alle $n \geq N$.

Sei $\kappa = \max\{1, \varepsilon^{-1}\}$. Wegen $\lim_n d_n = -\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d_n < -\kappa$ und $|d_n| > \kappa$ für alle $n \geq N$. Wegen $\kappa \geq 1$ gilt $\kappa^2 \geq \kappa$, und es folgt $d_n^2 = |d_n|^2 > \kappa^2 \geq \kappa \geq \varepsilon^{-1}$ für alle $n \geq N$.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{8n+5} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n} \qquad\qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+7}$$

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Grenzwertsätze gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{8n+5} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{8+\frac{5}{n}} \quad = \quad \frac{1-0}{8+0} \quad = \quad \tfrac{1}{8}.$$

Die angegebene Reihe kann laut Vorlesung aber nur konvergieren, wenn $\lim_n \frac{n-1}{8n+5} = 0$ gilt. Also ist die Reihe divergent. (Alternativ kann man hier das Minorantenkriterium verwenden. Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar.)

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$. Dann gilt jeweils

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+1} \quad = \quad \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2+1} \quad = \quad \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2+1} \quad = \quad \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^2}$$

und auf Grund der Grenzwertsätze somit $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+0)^2}{1+0^2} = \frac{1}{3} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe somit konvergent (sogar absolut konvergent).

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt jeweils

$$\frac{n+1}{2n^2+7} \quad \geq \quad \frac{n}{2n^2+7} \quad \geq \quad \frac{n}{2n^2+7n^2} \quad = \quad \frac{n}{9n^2} \quad = \quad \tfrac{1}{9} \cdot \frac{1}{n} \quad .$$

Laut Vorlesung divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, und damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{n}$. Auf Grund des Minorantenkriteriums ist also auch die angegebene Reihe divergent. (Auch hier ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.)