Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
18.02.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: ________________ Vorname: ________________

Matrikelnr.: ________________

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$3^{n+1} \quad \geq \quad n^2 + 1 \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Der Beweis muss durch vollständige Induktion geführt werden. Es ist unzulässig, einen direkten Beweis anzugeben.

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt $3^{1+1} = 9 \geq 2 = 1^2 + 1$.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen $3^{n+1} \geq n^2 + 1$ voraus *(Induktionsvoraussetzung)*. Dann folgt

$$\begin{aligned} 3^{(n+1)+1} \quad &= \quad 3 \cdot 3^n \quad \overset{(*)}{\geq} \quad 3 \cdot (n^2+1) \quad = \quad 3n^2 + 3 \quad = \quad n^2 + 2n^2 + 3 \\ &\geq \quad n^2 + 2n + 3 \quad \geq \quad n^2 + 2n + 2 \quad = \quad (n^2 + 2n + 1) + 1 \quad = \quad (n+1)^2 + 1. \end{aligned}$$

Dabei wurde an der Stelle (*) die Induktionsvoraussetzung verwendet.

alternative Vorgehensweise:

Zunächst überprüft man wie oben mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung die Ungleichung $3^{(n+1)+1} \geq 3n^2 + 3$. Anschließend bildet man die Ungleichungskette

$$(n+1)^2 + 1 \quad = \quad (n^2 + 2n + 1) + 1 \quad = \quad n^2 + 2n + 2 \quad \leq \quad n^2 + 2n^2 + 3 \quad = \quad 3n^2 + 3.$$

Insgesamt erhält man so $3^{(n+1)+1} \geq 3n^2 + 3 \geq (n+1)^2 + 1$.

Name: ____

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit 7 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{4}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{3}x_3 & = & \bar{1} \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{2}x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie die sieben Elemente der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

Lösung:

zu (a)

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix}$$

zu (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{5} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} & \bar{6} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

zu (c) Die Kennzahlen der normierten Zeilenstufenform sind $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$. An der letzen Spalte kann der spezielle Lösungsvektor $(\bar{5}, \bar{3}, \bar{0})$ abgelesen werden. Wegen $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$ besitzt der homogene Lösungsraum einen Basisvektor. Auf Grund der dritten Spalte ist dieser gegeben durch $b_3 = (-\bar{3}, -\bar{4}, \bar{1}) = (\bar{4}, \bar{3}, \bar{1})$. Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{3} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{F}_7 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{3} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{6} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{5} \\ \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{4} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{6} \end{pmatrix} \right\}.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g^{-1}(g(A)) = A$ gilt.

Lösung:

zu (a) Zu zeigen ist, dass f injektiv und surjektiv ist.

Injektivität: Seien $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = f(u,v)$ vorgegeben. Dann gilt

$$f(x,y) = f(u,v) \quad \Rightarrow \quad (x+y, 2x-y) = (u+v, 2u-v) \quad \Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (2x-y = 2u-v)$$
$$\Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (3x = 3u) \quad \Rightarrow \quad (x+y = u+v) \ \wedge \ (x = u) \quad \Rightarrow \quad (y = v) \wedge (x = u) \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (u,v).$$

Dabei wurden im dritten Schritt die beiden Gleichungen addiert, und im fünften Schritt die zweite Gleichung von der ersten subtrahiert.

Surjektivität: Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (a,b)$ existiert. Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$f(x,y) = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y, 2x-y) = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y = a) \ \wedge \ (2x-y = b) \quad \Leftrightarrow$$
$$(x+y = a) \ \wedge \ (3x = a+b) \quad \Leftrightarrow \quad (x+y = a) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b) \quad \Leftrightarrow$$
$$(\tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b + y = a) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b) \quad \Leftrightarrow \quad (y = \tfrac{2}{3}a - \tfrac{1}{3}b) \ \wedge \ (x = \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{3}b).$$

Es gilt also $f(\frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b, \frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b) = (a,b)$.

zu (b) „$\subseteq$“ Sei $x \in g^{-1}(g(A))$. Dann folgt $g(x) \in g(A)$. Es gibt also ein $a \in A$ mit $g(x) = g(a)$. Da g injektiv ist, folgt daraus $x = a$, und somit $x \in A$.

„$\supseteq$“ Sei $a \in A$. Dann gilt $g(a) \in g(A)$. Das Element a wird also nach $g(A)$ abgebildet, und nach Definition der Urbildmenge folgt daraus wiederum $a \in g^{-1}(g(A))$.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die folgende Teilmenge.

$$A \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 3 \wedge 2x - z = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Gleichung $v + U = A$ erfüllt ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tatsächlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: In Teil (b) braucht die Gleichung $v + U = A$ nicht überprüft werden, es genügt die Angabe von v und U.

Lösung:

zu (a) Wäre A ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, dann wäre $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$ in A enthalten. Es müsste dann $0 + 0 + 0 = 3$ und $2 \cdot 0 - 0 = 1$ gelten. Tatsächlich aber ist keine dieser beiden Gleichungen erfüllt, denn es ist $0 \neq 3$ und $0 \neq 1$.

zu (b) Die Gleichung ist erfüllt für $v = (1,1,1)$ und $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \wedge 2x - z = 0\}$.

zu (c) Es gilt $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \in U$ wegen $0 + 0 + 0 = 0$ und $2 \cdot 0 - 0 = 0$. Seien nun $u, w \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $u + w \in U$ und $\lambda u \in U$. Schreiben wir $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $w = (w_1, w_2, w_3)$, dann folgen aus $u, w \in U$ die Gleichungen $u_1 + u_2 + u_3 = w_1 + w_2 + w_3 = 0$ und $2u_1 - u_3 = 2w_1 - w_3 = 0$. Auf Grund der Gleichungen

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) + (u_3 + w_3) \quad = \quad (u_1 + u_2 + u_3) + (w_1 + w_2 + w_3) \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0$$

und

$$2(u_1 + w_1) - (u_3 + w_3) \quad = \quad (2u_1 - u_3) + (2w_1 - w_3) \quad = \quad 0 + 0 \quad = \quad 0$$

ist $u + w$ in U enthalten. Ebenso folgt aus den Gleichungen

$$(\lambda u_1) + (\lambda u_2) + (\lambda u_3) \quad = \quad \lambda(u_1 + u_2 + u_3) \quad = \quad \lambda \cdot 0 \quad = \quad 0$$

und $2(\lambda u_1) - (\lambda u_3) = \lambda(2u_1 - u_3) = \lambda \cdot 0 = 0$, dass auch λu in U liegt.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{8n+5} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n} \qquad\qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+7}$$

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Grenzwertsätze gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{8n+5} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{8+\frac{5}{n}} \quad = \quad \frac{1-0}{8+0} \quad = \quad \tfrac{1}{8}.$$

Die angegebene Reihe kann laut Vorlesung aber nur konvergieren, wenn $\lim_n \frac{n-1}{8n+5} = 0$ gilt. Also ist die Reihe divergent. (Alternativ kann man hier das Minorantenkriterium verwenden. Das Quotientenkriterium ist hier nicht anwendbar.)

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{n^2+1}{3^n}$. Dann gilt jeweils

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2+1} \quad = \quad \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2+1} \quad = \quad \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)^2}{n^2+1} \quad = \quad \tfrac{1}{3} \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{1+(\frac{1}{n})^2}$$

und auf Grund der Grenzwertsätze somit $\lim_n |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{(1+0)^2}{1+0^2} = \frac{1}{3} < 1$. Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe somit konvergent (sogar absolut konvergent).

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt jeweils

$$\frac{n+1}{2n^2+7} \quad \geq \quad \frac{n}{2n^2+7} \quad \geq \quad \frac{n}{2n^2+7n^2} \quad = \quad \frac{n}{9n^2} \quad = \quad \tfrac{1}{9} \cdot \frac{1}{n} \quad .$$

Laut Vorlesung divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, und damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{n}$. Auf Grund des Minorantenkriteriums ist also auch die angegebene Reihe divergent. (Auch hier ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar.)

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (4+6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x \le 1 \\ 3x - 3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f auch im Punkt 1 stetig ist.

In beiden Aufgabenteilen ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- oder rechtsseitige Stetigkeit zu verwenden. Arbeiten Sie entweder direkt mit der Definition des Stetigkeitsbegriffs oder mit dem ε-δ-Kriterium.

Lösung:

zu (a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = 0$. Wegen $f(0) = (0-1)^2 = 1$ muss $\lim_n f(x_n) = 1$ gezeigt werden. Wegen $\lim_n x_n = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1$ für alle $n \ge N$. Für diese n gilt dann insbesondere $x_n < 1$, und somit $f(x_n) = (x_n - 1)^2$. Auf Grund der Grenzwertsätze und der Voraussetzung $\lim_n x_n = 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (x_n - 1)^2 \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (0-1)^2 \quad = \quad 1.$$

zu (b) *1. Lösungsvariante (direkt anhand der Definition der Stetigkeit)*
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = 1$. Wegen $f(1) = (1-1)^2 = 0$ muss $\lim_n f(x_n) = 0$ gezeigt werden. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ erfüllt ist.

Dazu definieren wir die Hilfsfunktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = (x-1)^2$ und $h(x) = 3x - 3$. Weil g und h als Polynomfunktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind (und damit insbesondere im Punkt 1), folgt aus $\lim_n x_n = 1$ sowohl $\lim_n g(x_n) = g(1) = (1-1)^2 = 0$ als auch $\lim_n h(x_n) = h(1) = 3 \cdot 1 - 3 = 0$. Es gibt somit ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|g(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_1$, und ebenso ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|h(x_n)| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_2$.

Sei nun $N = \max\{N_1, N_2\}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge N$. Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist $x_n \le 1$, dann gilt $f(x_n) = g(x_n)$, und aus $n \ge N \ge N_1$ folgt $|f(x_n)| = |g(x_n)| < \varepsilon$. Ist dagegen $x_n > 1$, dann gilt $f(x_n) = h(x_n)$, und aus $n \ge N \ge N_2$ folgt $|f(x_n)| = |h(x_n)| < \varepsilon$. Insgesamt ist $|f(x_n)| < \varepsilon$ also für alle $n \ge N$ erfüllt. Â¸

2. Lösungsvariante (mit den ε-δ-Kriterium)
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$ jeweils $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ gilt. Wegen $f(1) = (1-1)^2 = 0$ ist die letzte Ungleichung äquivalent zu $|f(x)| < \varepsilon$. Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = (x-1)^2$ und $h(x) = 3x - 3$. Weil g als Polynomfunktion im Punkt 1 stetig ist, existiert (nach dem ε-δ-Kriterium) ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, so dass $|g(x)| = |g(x) - g(1)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta_1$ gilt. Auf Grund der Stetigkeit von h in 1 existiert ebenso ein $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(x)| = |h(x) - h(1)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta_2$.

Sei nun $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, und sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$. Ist $x \le 1$, dann gilt $f(x) = g(x)$, und aus $|x-1| < \delta \le \delta_1$ folgt $|f(x)| = |g(x)| < \varepsilon$. Ist $x > 1$, dann gilt $f(x) = h(x)$, und wegen $|x-1| < \delta \le \delta_2$ erhalten wir $|f(x)| = |h(x)| < \varepsilon$. Insgesamt ist $|f(x)| < \varepsilon$ also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| < \delta$ erfüllt.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (3+3+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die Ableitung der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{(x+1)^7}{x^2+1} \qquad \text{durch} \qquad g'(x) = (x+1)^6 \cdot \frac{5x^2-2x+7}{x^4+2x^2+1} \qquad \text{gegeben ist.}$$

Geben Sie hierzu einen kleinschrittigen Rechenweg an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Umkehrregel: Die Ableitung von

$$h :]-1,1[\to]0,\pi[\ ,\ x \mapsto \arccos(x) \qquad \text{ist gegeben durch} \qquad h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion aus Aufgabe 6. Weisen Sie nach, dass f im Punkt 1 nicht differenzierbar ist.

Lösung:

zu (a) Die Ableitung der Hilfsfunktion $g_1(x) = (x+1)^7$ ist auf Grund der Kettenregel gegeben durch $g_1'(x) = 7(x+1)^6$. Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$g'(x) = \frac{7(x+1)^6 \cdot (x^2+1) - (x+1)^7 \cdot (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{(x+1)^6 \cdot (7(x^2+1) - (x+1) \cdot 2x)}{(x^2+1)^2} =$$

$$(x+1)^6 \cdot \frac{7x^2+7-2x^2-2x}{x^4+2x^2+1} = (x+1)^6 \cdot \frac{5x^2-2x+7}{x^4+2x^2+1}.$$

zu (b) Die Funktion h ist die Umkehrfunktion von $\cos|_{]0,\pi[} :]0,\pi[\to]-1,1[$. Wegen $\cos'(x) = -\sin(x)$ und auf Grund der Umkehrregel erhalten wir für alle $x \in]-1,1[$ jeweils

$$h'(x) = \frac{1}{\cos'(h(x))} = -\frac{1}{\sin(h(x))}.$$

Wegen $x \in]-1,1[$ gilt $h(x) \in]0,\pi[$, und daraus folgt $\sin(h(x)) > 0$ und $\sin(h(x)) = |\sin(h(x))|$. Wegen $\sin(h(x))^2 + \cos(h(x))^2 = 1$ gilt außerdem $|\sin(h(x))| = \sqrt{\sin(h(x))^2} = \sqrt{1-\cos(h(x))^2} = \sqrt{1-x^2}$, wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass $(\cos \circ h)(x) = x$ gilt. Insgesamt erhalten wir damit $h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ wie angegeben.

zu (c) Auf Grund der Definition der Differenzierbarkeit müssen wir zeigen, dass der Funktionsgrenzwert

$$c = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1}$$

nicht in $\mathbb{R}$ existiert. Nehmen wir an, dass wäre doch der Fall. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 1$ müsste dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n - 1} = c$$

gelten. Die Folge $(1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren (auf Grund der Grenzwertsätze) beide gegen 1. Wir erhalten einerseits

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1-\frac{1}{n})}{(1-\frac{1}{n})-1} = \lim_{n\to\infty} (-n) \cdot f(1-\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} (-n) \cdot ((1-\tfrac{1}{n})-1)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-n) \cdot (-\tfrac{1}{n})^2 = \lim_{n\to\infty} (-\tfrac{1}{n}) = 0$$

und andererseits

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{f(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{1}{n})-1} = \lim_{n\to\infty} n \cdot f(1+\tfrac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} n \cdot (3(1+\tfrac{1}{n})-3) = \lim_{n\to\infty} 3 = 3.$$

Unsere Annahme hat also zum Widerspruch $0 = c = 3$ geführt.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x+3$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\mathcal{Z}_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$, die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$.

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n)$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n)$.
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie das Unter- und das Oberintegral von f und entscheiden Sie begründet, ob die Funktion f Riemann-integrierbar ist.

Lösung:

zu (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $0 \leq k \leq n$ sei $x_k = \frac{k}{n}$, und für $0 \leq k < n$ sei außerdem $c_k = \inf f([x_k, x_{k+1}])$ und $d_k = \sup f([x_k, x_{k+1}])$. Weil f streng monoton wachsend ist, gilt jeweils $c_k = f(x_k) = 4 \cdot \frac{k}{n} + 3$ und $d_k = f(x_{k+1}) = 4 \cdot \frac{k+1}{n} + 3$. Die Untersumme ist also gegeben durch

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (4 \cdot \tfrac{k}{n} + 3) \cdot \frac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} (4k + 3n) =$$
$$\tfrac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k + \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} 3n = \tfrac{4}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2}(n-1)n + \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot 3n = 2(1 - \tfrac{1}{n}) + 3 = 5 - \tfrac{2}{n}$$

und die Obersumme durch

$$\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (4 \cdot \tfrac{k+1}{n} + 3) \cdot \frac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (4k + 3n) =$$
$$\tfrac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \tfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} 3n = \tfrac{4}{n^2} \cdot \tfrac{1}{2}n(n+1) + \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot 3n = 2(1 + \tfrac{1}{n}) + 3 = 5 + \tfrac{2}{n}$$

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten jeweils die Ungleichungen

$$5 - \tfrac{2}{n} = \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n) \leq \int_{0\bigstar}^{1} f(x)\,dx \leq \int_{0}^{1\bigstar} f(x)\,dx \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n) = 5 + \tfrac{2}{n}.$$

Wegen $\lim_n (5 - \frac{2}{n}) = 5 = \lim_n (5 + \frac{2}{n})$ liefert das Sandwich-Lemma

$$\int_{0\bigstar}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1\bigstar} f(x)\,dx = 5.$$

Die Übereinstimmung von Unter- und Oberintegral zeigt, dass die Funktion f Riemann-integrierbar ist.