Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
18.02.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$3^{n+1} \quad \geq \quad n^2 + 1 \qquad \text{gilt.}$$

Hinweis: Der Beweis muss durch vollständige Induktion geführt werden. Es ist unzulässig, einen direkten Beweis anzugeben.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit 7 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{4}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{3}x_3 & = & \bar{1} \\ \bar{2}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{2}x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3}. \end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.

(b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.

(c) Geben Sie die sieben Elemente der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems an.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

(a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

(b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \to Y$ eine injektive Abbildung und $A \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g^{-1}(g(A)) = A$ gilt.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die folgende Teilmenge.

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 3 \wedge 2x - z = 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ und einen Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Gleichung $v + U = A$ erfüllt ist.

(c) Weisen Sie nach, dass die von Ihnen angegebene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ tatsächlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: In Teil (b) braucht die Gleichung $v + U = A$ nicht überprüft werden, es genügt die Angabe von v und U.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{8n+5}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n^2+7}$

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (4+6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 3x-3 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f auch im Punkt 1 stetig ist.

In beiden Aufgabenteilen ist es unzulässig, Aussagen über links- oder rechtsseitige Grenzwerte oder links- oder rechtsseitige Stetigkeit zu verwenden. Arbeiten Sie entweder direkt mit der Definition des Stetigkeitsbegriffs oder mit dem ε-δ-Kriterium.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (3+3+4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsregeln, dass die Ableitung der Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{(x+1)^7}{x^2+1} \qquad \text{durch} \qquad g'(x) = (x+1)^6 \cdot \frac{5x^2 - 2x + 7}{x^4 + 2x^2 + 1} \qquad \text{gegeben ist.}$$

Geben Sie hierzu einen kleinschrittigen Rechenweg an.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Umkehrregel: Die Ableitung von

$$h :]-1,1[\ \to\ ]0,\pi[\ ,\ x \mapsto \arccos(x) \qquad \text{ist gegeben durch} \qquad h'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion aus Aufgabe 6. Weisen Sie nach, dass f im Punkt 1 nicht differenzierbar ist.

Name: ____

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4x + 3$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\mathcal{Z}_n = \{\frac{k}{n} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$, die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0,1]$.

(a) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Untersumme $\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}_n)$ und die Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}_n)$.
Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie das Unter- und das Oberintegral von f und entscheiden Sie begründet, ob die Funktion f Riemann-integrierbar ist.