



Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
16.04.2025

Analysis und Lineare Algebra I

(Studiengang Wirtschaftspädagogik)

Nachschreibklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Hinweise:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.
- (f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die folgende Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{gilt.}$$

Lösung:

Induktionsanfang: Es gilt

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1 \cdot 1 + 1}.$$

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und die Gleichung für n vorausgesetzt. Dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)} = \\ &= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ &= \frac{(2n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 2. (2+5+3 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & + & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{3} \\ -x_1 & - & \bar{3}x_2 & - & x_3 & = & \bar{1} \\ -\bar{2}x_1 & + & \bar{5}x_2 & & & = & -\bar{2}. \end{array}$$

- (a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems an.
- (b) Formen Sie diese Matrix auf normierte Zeilenstufenform um.
- (c) Geben Sie Vektoren $u, v \in \mathbb{F}_{11}^3$ an mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{L} = \{u + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{F}_{11}\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist.

Lösung:

zu (a)

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ -\bar{1} & -\bar{3} & -\bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{2} & \bar{5} & \bar{0} & -\bar{2} \end{pmatrix}$$

zu (b)

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ -\bar{1} & -\bar{3} & -\bar{1} & \bar{1} \\ -\bar{2} & \bar{5} & \bar{0} & -\bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{0} & -\bar{2} & \bar{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & -\bar{1} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & -\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

zu (c) Die Matrix in normierter ZSF hat die Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 1$ und $j_2 = 3$. Die letzte Spalte der Matrix liefert die spezielle Lösung $u = (\bar{1}, \bar{0}, -\bar{2}) = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{9})$. Die zweite Spalte liefert den homogenen Lösungsvektor $v = b_2 = (-\bar{3}, \bar{1}, \bar{0}) = (\bar{8}, \bar{1}, \bar{0})$.

Name: _____

Aufgabe 3. (5+5 Punkte)

- (a) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

- (b) Seien nun X und Y beliebige Mengen, $g : X \rightarrow Y$ eine injektive Abbildung und $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$ gilt.

Lösung:

zu (a) Zum Nachweis der Injektivität seien $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = f(u, v)$ vorgegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - v \end{pmatrix} &\Rightarrow (y = v) \wedge (x - y = u - v) \\ \Rightarrow (y = v) \wedge (x - v = u - v) &\Rightarrow (y = v) \wedge (x = u) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für den Nachweis der Surjektivität sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (a, b)$ existiert. Für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow (y = a) \wedge (x - y = b) \\ \Rightarrow (y = a) \wedge (x - a = b) &\Rightarrow (x = a + b) \wedge (y = a). \end{aligned}$$

Es gilt also $f(a + b, a) = (a, b)$.

zu (b) „ $\subseteq$ “ Sei $y \in g(A \cap B)$. Dann existiert ein $x \in A \cap B$ mit $y = g(x)$. Aus $x \in A \cap B$ folgt $x \in A$ und damit $y = g(x) \in g(A)$. Ebenso erhält man $x \in B$ und $y = g(x) \in g(B)$. Insgesamt gilt also $y \in g(A) \cap g(B)$.

„ $\supseteq$ “ Sei $y \in g(A) \cap g(B)$. Wegen $y \in g(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $y = g(a)$. Wegen $y \in g(B)$ existiert auch ein $b \in B$ mit $y = g(b)$. Aus $g(a) = y = g(b)$ und der Injektivität von g folgt $a = b$. Daraus wiederum folgt $a \in A \cap B$ und $y = g(a) \in g(A \cap B)$.

Name: _____

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$, außerdem $U = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid z^2 + w^2 = 0\}$ und

$$W = \{(x + iy, u + iv) \in \mathbb{C}^2 \mid x, y, u, v \in \mathbb{R}, x + u = 0\}.$$

In Aufgabenteil (a) und (b) betrachten wir V als $\mathbb{C}$ -Vektorraum, mit der herkömmlichen komponentenweisen Vektoraddition und skalaren Multiplikation.

- (a) Zeigen Sie, dass U kein Untervektorraum von V ist.
- (b) Zeigen Sie, dass W ebenfalls kein Untervektorraum von V ist.
- (c) Nun betrachten wir V als $\mathbb{R}$ -Vektorraum, indem wir den Definitionsbereich der herkömmlichen skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^2$ einschränken. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum dieses $\mathbb{R}$ -Vektorraums ist.

Lösung:

zu (a) Wegen $i^2 + 1^2 = (-1) + 1 = 0$ ist $(i, 1)$ in U enthalten. Ebenso ist $(-i, 1)$ wegen $(-i)^2 + 1^2 = (-1) + 1 = 0$ ein Element von U . Wäre U ein Untervektorraum, dann müsste auch der Vektor $(i, 1) + (-i, 1) = (0, 2)$ in U liegen. Aber dies ist wegen $0^2 + 2^2 = 4 \neq 0$ nicht der Fall.

zu (b) Das Element $(i, i) = (0 + 1 \cdot i, 0 + 1 \cdot i)$ ist wegen $0 + 0 = 0$ in W enthalten. Wäre W ein Untervektorraum, dann müsste auch das Element $(-i) \cdot (i, i) = (1, 1) = (1 + 0 \cdot i, 1 + 0 \cdot i)$ in W liegen. Aber dies ist wegen $1 + 1 = 2 \neq 0$ nicht der Fall.

zu (c) Der Nullvektor ist wegen $(0, 0) = (0 + 0 \cdot i, 0 + 0 \cdot i)$ und $0 + 0 = 0$ in W enthalten. Seien $w, w' \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $w + w' \in W$ und $\lambda w \in W$. Wegen $v, w \in W$ gibt es $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $w = (x + iy, u + iv)$, $w' = (a + ib, c + id)$ und $x + u = a + c = 0$. Dann ist

$$w + w' = ((x + a) + i(y + b), (u + c) + i(v + d)) \quad ,$$

und wegen $(x + a) + (u + c) = (x + u) + (a + c) = 0 + 0 = 0$ ist $w + w'$ in W enthalten. Weiter gilt

$$\lambda w = (\lambda x + i\lambda y, \lambda u + i\lambda v) \quad ,$$

und wegen $\lambda x + \lambda u = \lambda(x + u) = \lambda \cdot 0 = 0$ gilt auch $\lambda w \in W$.

Name: _____

Aufgabe 5. (10 Punkte)

Berechnen Sie die Inverse der folgenden Matrix $A \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 & -i \\ 1 & 0 & -1 \\ i+1 & i & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir wenden das Berechnungsverfahren aus der Vorlesung an.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ i+1 & i & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ i+1 & i & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & i-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 1 & i & i-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & i & i & -i & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & -1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -i \end{pmatrix} \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 1-i & -1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -i \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Ergebnis der Rechnung ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ -1 & i & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Name: _____

Aufgabe 6. (3+3+4 Punkte)

Wir betrachten die folgende Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$.

$$A = \left\{ 2^{-n} + 3^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

- (a) Weisen Sie nach, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie das Supremum von A (mit Nachweis).
- (c) Zeigen Sie, dass $\inf(A) = 0$ gilt.

Lösung:

zu (a) Die Menge A enthält die Elemente $2^{-0} + 3^{-0} = 2$ und $2^{-1} + 3^{-1} = \frac{5}{6}$. Wäre A ein Intervall, dann müsste jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{5}{6} < x < 2$ in A liegen, unter anderem auch die Zahl 1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt aber $2^{-n} + 3^{-n} \leq \frac{5}{6} < 1$, die Gleichung $2^{-n} + 3^{-n} = 1$ ist also für kein $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Somit gilt $1 \notin A$.

zu (b) Wir zeigen, dass 2 das Maximum, und somit auch das Supremum, von A ist. Wie wir in Teil (a) gesehen haben, ist 2 in A enthalten. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt auch $2^{-n} + 3^{-n} \leq 2^{-0} + 3^{-0} = 2$. Somit ist 2 eine obere Schranke von A , insgesamt das Maximum.

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2^{-n} + 3^{-n} \geq 0$. Dies zeigt, dass 0 eine untere Schranke von A ist. Nehmen wir an, 0 ist nicht die größte untere Schranke. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, das untere Schranke von A ist. Aber wegen $\lim_n 2^{-n} = 0$ existiert andererseits $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Es gilt dann $2^{-m} + 3^{-m} < 2^{-m} + 2^{-m} < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Wegen $2^{-m} + 3^{-m} \in A$ steht das im Widerspruch zu der Annahme, dass ε eine untere Schranke von A ist.

Name: _____

Aufgabe 7. (4+6 Punkte)

- (a) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\lim_n a_n = -\infty$ und $\lim_n b_n = +\infty$ gilt. Konvergiert dann die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ immer gegen den Wert 0? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an. Weisen Sie ggf. nach, dass Ihr Gegenbeispiel die Aussage tatsächlich widerlegt.
- (b) Sei nun $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit $\lim_n c_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n + 1} = 0 \quad \text{gilt.}$$

In Teil (b) ist die Verwendung von Rechenregeln für uneigentliche Grenzwerte unzulässig. Arbeiten Sie direkt mit der Definition des Konvergenzbegriffs bzw. der uneigentlichen Konvergenz.

Lösung:

zu (a) Nein. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Folgen gegeben durch $a_n = n + 1$ und $b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_n b_n = -\infty$ gilt. Außerdem ist $\lim_n a_n = +\infty$. Ist nämlich $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \kappa$, dann gilt $a_n = n + 1 > n \geq N > \kappa$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Andererseits gilt $a_n + b_n = (n + 1) + (-n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $\lim_n (a_n + b_n) = 1$.

zu (b) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$\left| \frac{1}{c_n + 1} - 0 \right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad |c_n + 1| > \varepsilon^{-1}.$$

Wegen $\lim_n c_n = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $c_n > \varepsilon^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Für diese n gilt wegen $c_n + 1 > 0$ jeweils $|c_n + 1| = c_n + 1 > c_n > \varepsilon^{-1}$, und $|\frac{1}{c_n+1} - 0| < \varepsilon$ auf Grund der Äquivalenz. Damit ist $\lim_n \frac{1}{c_n+1} = 0$ nachgewiesen.

Name: _____

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie das jeweils verwendete Konvergenzkriterium an, und kontrollieren Sie jeweils, dass die Voraussetzungen dieses Kriteriums erfüllt sind.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+3} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^2+3n+1} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+3)!}$$

Lösung:

zu (a) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{2 + 3 \cdot \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{2 + 3 \cdot 0} = 0,$$

und wegen $n+1 \geq n \Rightarrow 2(n+1)+3 \geq 2n+3 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)+3} \leq \frac{1}{2n+3}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $(\frac{1}{2n+3})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Die angegebene Reihe konvergiert somit auf Grund des Leibniz-Kriteriums.

zu (b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die harmische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert, damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$\frac{3n-1}{2n^2+3n+1} \leq \frac{3n}{2n^2+3n+1} \leq \frac{3n}{2n^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Also folgt die Divergenz der gegebenen Reihe aus dem Minorantenkriterium.

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{n^2}{(n+3)!}$. Es gilt jeweils

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)^2}{(n+4)!} \cdot \frac{(n+3)!}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n+4} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{n}}.$$

Aus $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ und den Grenzwertsätzen folgt $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = (1+0)^2 \cdot \frac{0}{1+4 \cdot 0} = 0$. Wegen $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ kann das Quotientenkriterium angewendet werden, das die Konvergenz der Reihe (sogar die absolute Konvergenz) liefert.