

Satz (16.1)

Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, $S \subseteq L$ eine Teilmenge mit $L = K(S)$ und $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Homomorphismus in einen weiteren Körper $\tilde{K}$. Sind dann $\psi_1, \psi_2 : L \rightarrow \tilde{K}$ zwei Fortsetzungen von ϕ mit $\psi_1|_S = \psi_2|_S$, dann gilt $\psi_1 = \psi_2$.

wichtiger Spezialfall:

Gilt $L = K(\alpha)$ für ein $\alpha \in L$ und ist $\beta \in \tilde{K}$, dann gibt es für jeden Homomorphismus $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ und jedes $\beta \in \tilde{K}$ **höchstens eine** Fortsetzung $\psi_\beta : K(\alpha) \rightarrow \tilde{K}$ von ϕ mit der Eigenschaft $\psi_\beta(\alpha) = \beta$.

Satz (16.2)

- Sei $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern.
- Seien $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen.
- Sei $\alpha \in L$ ein über K algebraisches Element und f das Minimalpolynom von α über K .
- Sei $\tilde{\alpha} \in \tilde{L}$ eine Nullstelle von $\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$.

Dann gibt es eine **eindeutig bestimmte Fortsetzung** ψ von ϕ auf $K(\alpha)$ mit $\psi(\alpha) = \tilde{\alpha}$. Dieser Homomorphismus ψ definiert einen **Isomorphismus** zwischen den beiden Körpern $K(\alpha)$ und $\tilde{K}(\tilde{\alpha})$.

Beispiel zu Satz 16.2

$$K = \mathbb{Q}, \quad \phi = \text{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad L = \tilde{L} = \mathbb{C}$$

$$f = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x] \rightarrow \tilde{f} = \phi(f) = x^2 - 2$$

Sei $\alpha = \sqrt{2}$ (Nullstelle von f) und $\tilde{\alpha} = -\sqrt{2}$ (Nullstelle von $\tilde{f}$). Nach Satz 16.2 gibt es eine (eindeutig bestimmte) Fortsetzung γ von ϕ auf $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit $\gamma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ ($\gamma : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{C}$).

Anßerdem ist γ ein Isomorphismus zwischen $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\gamma(\mathbb{Q}(\sqrt{2})) = \mathbb{Q}(-\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, also ein $\mathbb{Q}$ -Automorphismus von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

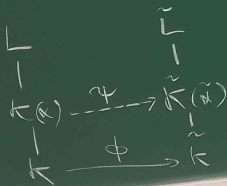
Beweis von Satz 16.2

geg. K Körper, $\phi: K \rightarrow \tilde{K}$ Isomorphismus von Körpern
(definiert einen Ringisom. $\phi: K[x] \rightarrow \tilde{K}[x]$, geg. durch
 $\sum_{k=0}^n a_k x^k \mapsto \sum_{k=0}^n \phi(a_k) x^k$) außerdem:

$L|K, \tilde{L}|\tilde{K}$ Erweiterungskörper

$\alpha \in L, f = \mu_{\alpha, K}, \tilde{f} = \phi(f), \tilde{\alpha} \in \tilde{L}$ Nullstelle von $\tilde{f}$

Beh. Es gibt eine eindeutige Fortsetzung $\psi: K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ von ϕ mit $\psi(\alpha) = \tilde{\alpha}$,
und diese liefert einen Isomorphismus
zwischen $K(\alpha)$ und $\tilde{K}(\tilde{\alpha})$.



Die Eindeutigkeit folgt durch Anwendung von Satz 16.1 auf $S = \{x\}$.

zur Existenz: bereits bekannt: Wegen $f = M_{\alpha, \kappa}$, $\tilde{f} = M_{\tilde{\alpha}, \tilde{\kappa}}$ gibt es Isomorphismen $\phi_1: K[x]/(f) \rightarrow K(\alpha)$ und $\phi_2: \tilde{K}[\tilde{x}]/(\tilde{f}) \rightarrow \tilde{K}(\tilde{\alpha})$ mit $\phi_1(g + (f)) = g(\alpha) \forall g \in K[x]$ und $\phi_2(\tilde{g} + (\tilde{f})) = \tilde{g}(\tilde{\alpha})$ für alle $\tilde{g} \in \tilde{K}[\tilde{x}]$.

$$\left[K(\alpha) \xrightarrow{\phi_1^{-1}} K[x]/(f) \xrightarrow{\bar{\rho}} \tilde{K}[\tilde{x}]/(\tilde{f}) \xrightarrow{\phi_2} \tilde{K}(\tilde{\alpha}) \right]$$

zu
Tatsa

$$= (\phi_1$$

zu (ii)

$$(\phi_2 \circ \bar{\rho})$$

Betrachte nun die Abb. $\rho: K[x] \rightarrow \tilde{K}[x]/(\tilde{f})$,
 $g \mapsto \phi(g) + (\tilde{f})$ Als Komp. des Ringisom.
 $\phi: K[x] \rightarrow \tilde{K}[x]$ mit dem kan. Epimorphis-
 mus $\tilde{K}[x] \rightarrow \tilde{K}[x]/(\tilde{f})$ ist dies ein sur-
 jektiver Ringhom. Um den Hom-satz anzuwenden
 zu können, muss noch geprüft werden:

$$\begin{aligned}
 &\forall g \in K[x]: g \in \ker(\rho) \Leftrightarrow g \in (f) \\
 &\Rightarrow " g \in \ker(\rho) \Rightarrow \rho(g) = (\tilde{f}) \Rightarrow \\
 &\phi(g) + (\tilde{f}) = (\tilde{f}) \Rightarrow \phi(g) \in (\tilde{f}) \\
 &\Rightarrow \exists \tilde{h} \in \tilde{K}[x] \text{ mit } \phi(g) = \tilde{h} \tilde{f} \\
 &\phi \text{ surj} \Rightarrow \exists h \in K[x] \text{ mit } \phi(h) = \tilde{h}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \phi(g) = \phi(h) \cdot \tilde{f} = \phi(h) \phi(f) = \phi(hf)$$

$$\stackrel{\phi \text{ inj}}{\Rightarrow} g = hf \Rightarrow g \in (f)$$

$$\stackrel{''}{\Leftarrow} g \in (f) \Rightarrow \exists h \in K[x] \text{ mit } g = hf$$

$$\Rightarrow \phi(g) = \phi(h) \cdot \tilde{f} \Rightarrow \phi(g) \in (\tilde{f}) \Rightarrow$$

$$\rho(g) = \phi(g) + (\tilde{f}) = (\tilde{f}) \Rightarrow g \in \ker(\rho)$$

Der Homomorphiesatz für Ringe liefert also einen Isom $\bar{\rho} : K[x]/(f) \rightarrow \tilde{K}[x]/(\tilde{f})$

$$\Rightarrow \psi = \phi_2 \circ \bar{\rho} \circ \phi_1^{-1} \text{ liefert ein Isom } K(x) \rightarrow \tilde{K}(\tilde{x})$$

noch zu überprüfen:

(i) ψ ist Fortsetzung von ϕ , d.h. $\psi|_K = \phi$

(ii) $\psi(h) = \tilde{h}$

zu i) Sei $a \in K$. z.zg. $\psi(a) = \phi(a)$

$$\begin{aligned} \text{Tatsächlich gilt } \psi(a) &= (\phi_2 \circ \bar{\rho} \circ \phi_1^{-1})(a) = \\ &= (\phi_2 \circ \bar{\rho})(a + (f)) = \phi_2(\phi(a) + (f)) = \phi(a). \end{aligned}$$

- zu ii) $\psi(x) = (\phi_2 \circ \bar{\rho} \circ \phi_1^{-1})(x) =$

$$(\phi_2 \circ \bar{\rho})(x + (f)) = \phi_2(x + (\tilde{f})) = \tilde{x}.$$

□

$\left(\begin{smallmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{smallmatrix} \right)$

$\left(\begin{smallmatrix} x \\ \tilde{x} \end{smallmatrix} \right)$

Satz (16.3)

Sei $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern. Seien außerdem $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen, $\alpha \in L$ und $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(\alpha) = 0$. Ist dann $\psi : K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ ein Körperhomomorphismus mit $\psi|_K = \phi$, dann ist $\tilde{\alpha} = \psi(\alpha)$ eine Nullstelle von $\tilde{f} = \phi(f)$.

Beweis von Satz 16.3

geg. Körperhom. $\phi: K \rightarrow \tilde{K}$, $L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererw.,
 $\alpha \in L$, $f \in K[X]$ mit $f(\alpha) = 0$, $\psi: K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ Fort-
setzung von ϕ

Beh: $\tilde{\alpha} = \psi(\alpha)$ ist Nullstelle von $\tilde{f} = \phi(f)$

Sei $f = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \dots, a_n \in K$).

$$\Rightarrow \tilde{f} = \phi(f) = \sum_{k=0}^n \phi(a_k) x^k \quad \text{z.zg.} \quad \tilde{f}(\tilde{\alpha}) = 0$$

$$\tilde{f}(\tilde{\alpha}) = \sum_{k=0}^n \phi(a_k) \tilde{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n \psi(a_k) \psi(\alpha)^k$$

$\uparrow \psi|_K = \phi$

$$= \sum_{k=0}^n \psi(a_k x^k) = \psi\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k\right) = \psi(f(x))$$

$$= \psi(0_L) = 0_{\tilde{L}}$$



Die Anzahl der Fortsetzungen eines Körperhomomorph.

Folgerung (16.4)

Sei $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern. Seien außerdem $L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen, $\alpha \in L$ algebraisch über K und $f = \mu_{K,\alpha}$. Dann stimmt die **Anzahl der Fortsetzungen** $\psi : K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ von ϕ überein mit der **Anzahl der Nullstellen** von $\tilde{f} = \phi(f)$ in $\tilde{L}$.

Folgerung (16.5)

Für jede algebraische Erweiterung $L|K$ gilt $\text{Hom}_K(L, L) = \text{Aut}_K(L)$.

Beispiel zu Folgerung 16.4.

$$K = \hat{K} = \mathbb{Q}, \quad \phi = \text{id}_{\mathbb{Q}}, \quad f = x^3 - 2, \quad \alpha = \sqrt[3]{2}$$

- i) Es gibt drei Fortsetzungen von ϕ zu einem Körperhom. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{C}$ (denn: Das Bildpolynom $\tilde{f} = \phi(f) = x^3 - 2$ hat genau drei Nullstellen in $\mathbb{C}$, nämlich $\sqrt[3]{2}$, $\zeta^2 \sqrt[3]{2}$, $\zeta \sqrt[3]{2}$, wobei ζ die komplexe Zahl $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ mit $\zeta^3 = 1$ ist.
- ii) Es gibt genau eine Fortsetzung von ϕ zu einem Körperhom. $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ (denn: $x^3 - 2$ hat nur eine reelle Nullstelle, nämlich $\sqrt[3]{2}$)

(leicht zu sehen: Die Fortsetzung ist geg. durch

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x.)$$

(iii) Es gibt keine Fortsetzung von ϕ zu einem Körperhom.

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \rightarrow \mathbb{Q} \text{ (denn } x^3 - 2 \text{ hat keine Nullstelle in } \mathbb{Q}.)$$

Beweis von Folgerung 16.4:

geg. $\phi: K \rightarrow \tilde{K}$ Körperisom.

$L|K, \tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen

$\alpha \in L$ algebraisch über $K, f = \mu_{\alpha, K},$

$\tilde{f} = \phi(f) \in \tilde{K}[x]$ z.zg.

Anzahl Fortsetzungen
von ϕ zu einem Hom.
 $K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ = Anzahl der Null-
stellen von $\tilde{f}$
in Körper $\tilde{L}$

Seien $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ die ^{verschiedenen} Nullstellen von $\tilde{f}$ in $\tilde{L}$.

Fortsetzungssatz 16.2 $\Rightarrow$ Für $1 \leq i \leq r$

Beweis von Folgerung 16.4 (Abschluss)

... existiert jeweils eine Fortsetzung $\psi_i : K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ mit $\psi_i(\alpha) = \tilde{\alpha}_i$. Für $i \neq j$ gilt jeweils $\tilde{\alpha}_i \neq \tilde{\alpha}_j$ und damit $\psi_i \neq \psi_j$. Dies zeigt, dass es **mindestens** r verschiedene Fortsetzungen von ϕ auf $K(\alpha)$ gibt.

Sei nun $\psi : K(\alpha) \rightarrow \tilde{L}$ eine beliebige Fortsetzung von ϕ . Nach Satz 16.3 ist $\tilde{\alpha} = \psi(\alpha)$ eine Nullstelle von $\tilde{f}$. Es gibt also ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_i$. Mit Satz 16.1 folgt daraus $\psi = \psi_i$. Dies zeigt, dass über die r angegebenen Fortsetzungen hinaus keine weiteren gibt.

Beweis von Folgerung 16.5:

geg. algebraische Erweiterung $L|K$

Beh. $\text{Hom}_K(L, L) = \text{Aut}_K(L)$

" $\supseteq$ " ist klar nach Definition

" $\subseteq$ " Sei $\phi: L \rightarrow L$ ein K -Homomorphismus.

Als Körperhom. ist ϕ injektiv. Zu zeigen

bleibt die Surjektivität. Sei $\beta \in L$.

z.zg.: $\exists \alpha \in L$ mit $\phi(\alpha) = \beta$

Sei $P = \text{Min}_{\beta, K}$ (existiert, da β algebraisch über K)

Sei $N = \{ \alpha \in L \mid P(\alpha) = 0 \}$ Satz 16.3

$\Rightarrow \phi|_N$ ist eine injektive Abb. $N \rightarrow N$
 N endl., $\phi|_N : N \rightarrow N$ injektiv. $\Rightarrow \phi|_N$ ist auch
eine surjektive Abb. $N \rightarrow N$ Es gibt also ein
 $\alpha \in N$ mit $\phi(\alpha) = (\phi|_N)(\alpha) = \beta$. $\square$

Lemma (16.6)

Sei $\phi : K \rightarrow \tilde{K}$ ein Isomorphismus von Körpern und $L|K$ und $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen. Sei $S \subseteq L$ eine Teilmenge und $\psi : L \rightarrow \tilde{L}$ eine **Fortsetzung** von ϕ . Dann gilt

$$\psi(K(S)) = \tilde{K}(\psi(S)).$$

Beweis von Lemma 16.6

geg.: Bom $\phi: K \rightarrow \tilde{K}$ von Körpern, $L|K$, $\tilde{L}|\tilde{K}$ Körpererweiterungen, $\psi: L \rightarrow \tilde{L}$ Fortsetzung von ϕ , $S \subseteq L$

Beh.: $\psi(K(S)) = \tilde{K}(\psi(S))$

Sei $M = \psi(K(S))$. Überprüfe, dass M die definierenden Eigenschaften von $\tilde{K}(\psi(S))$ hat, also in Einzelnen

(1) M ist Zwischenkörper von $\tilde{L}|\tilde{K}$, $M \supseteq \psi(S)$

(2) Ist L_1 ein bel. Zw. körp. von $\tilde{L}|\tilde{K}$ mit $L_1 \supseteq \psi(S)$,

dann folgt $L_1 \supseteq M$

zu (1) ψ ist körperhom. $L \rightarrow \tilde{L} \Rightarrow M = \psi(K(S))$ ist Teilkörper von $\tilde{L}$ außerdem: $K(S) \supseteq S \Rightarrow M \supseteq \psi(S)$

$$K(S) \supseteq K \Rightarrow M \supseteq \psi(K) = \phi(K) = \tilde{K} \rightarrow$$

M ist Zwischenkörper von $\tilde{L} | \tilde{K}$

zu (2) z.zg.: $L_1 \supseteq \psi(K(S))$ genügt: $K(S) \subseteq \psi^{-1}(L_1)$

leicht zu überprüfen: $\psi^{-1}(L_1)$ ist Teilkörper von L

(siehe Skript) $\psi(K) = \tilde{K} \subseteq L_1 \Rightarrow K \subseteq \psi^{-1}(L_1)$

$$\psi(S) \subseteq L_1 \Rightarrow S \subseteq \psi^{-1}(L_1)$$

$\psi^{-1}(L_1)$ ist Teilkörper von L , $K \subseteq \psi^{-1}(L_1)$, $S \subseteq \psi^{-1}(L_1)$

$$\Rightarrow K(S) \subseteq \psi^{-1}(L_1). \quad \square$$