Proposition (6.1)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und U eine Untergruppe von G. Dann ist jedem $u \in U$ durch $\tau_u(n) = unu^{-1}$ ein Automorphismus von N zugeordnet. Die Abbildung

$$\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), \quad u \mapsto \tau_u$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen.

U_n noch zzg. $U_n = U_g$

Erinnerung:

G inneres direktes Produkt von $N \leq G$ und $U \leq G$

falls (i) $N \cap U = \{e\}$

(ii) $G = NU$

(iii) $N \trianglelefteq G$, $U \trianglelefteq G$

inneres <u>semidirektes</u> Produkt, falls an Stelle von (iii) nur $N \trianglelefteq G$

(Es gilt dann $G \cong N \rtimes_\phi U$, wobei $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ geg. durch $u \mapsto \tau_u$, mit $\tau_u(n) = unu^{-1}$ $\forall n \in N$ und $u \in U$.)

Proposition (6.2)

Sei G eine Gruppe und inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$. Unter diesen Voraussetzungen ist G genau dann ein inneres direktes Produkt von N und U, wenn $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt, wobei ϕ den Homomorphismus aus Proposition 6.1 bezeichnet.

Beweis von Prop. 6.2:

Seien G, N, U, ϕ wie oben definiert, und G ein inneres semidirektes Produkt von N und U.

Beh.: G ist inneres direktes Prod. von N und U
$$\iff \phi(u) = id_N \ \forall u \in U \quad (*)$$

„$\Leftarrow$" z.zg.: Unter der Vor. $(*)$ gilt $U \trianglelefteq G$.

Für alle $u \in U$ gilt $\tau_u = \phi(u) = id_N \Rightarrow \forall u \in U, n \in N$:
$unu^{-1} = \tau_u(n) = id_N(n) = n \Rightarrow \forall u \in U, n \in N: \ un = nu$

Daraus wiederum folgt $nU = Un \quad \forall n \in N$.

G inneres semidirektes Prod. $\Rightarrow G = NU \Rightarrow$ Jedes $g \in G$ hat die Form $g = nu$ mit $u \in U, n \in N$. Somit gilt dann jeweils $gU = nuU = nU = Un$ noch z.zg. $Un = Ug$

$g = nu \in nU = Un \Rightarrow \exists u_1 \in U$ mit

$g = u_1 n \Rightarrow Ug = Uu_1n = Un$.

„$\Rightarrow$" bereits gezeigt (in §4. im Abschnitt über innere direkte Produkte): Gilt $N \trianglelefteq G$, $U \trianglelefteq G$ und $U \cap N = \{e\}$, dann ist jedes $n \in N$ mit jedem $u \in U$ vertauschbar. $\Rightarrow \forall n \in N, u \in U: \tau_u(n) = unu^{-1} = n$

$= id_N(n) \Rightarrow u \in U: \phi(u) = \tau_u = id_N$ $\square$

ge

G

zu li

Es g

$\forall g_1$

Sei g

$g_1 G$

$\Rightarrow \exists$

Das äußere semidirekte Produkt

Satz (6.3)

Seien U und N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1\phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von N und U und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

Inneres und äußeres semidirektes Produkt

Satz (6.4)

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Wir setzen voraus, dass G das innere semidirekte Produkt N und U ist. Definieren wir $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in Proposition 6.1, dann ist durch $(n, u) \mapsto nu$ ein Isomorphismus $N \rtimes_\phi U \cong G$ definiert.

Die Diedergruppen als semidirektes Produkt

Proposition (6.5)

Für jedes $n \geq 3$ ist die Diedergruppe D_n ein inneres semidirektes Produkt des Normalteilers $N = \langle \rho_n \rangle$ und der Untergruppe $U = \langle \tau \rangle$. Somit ist D_n isomorph zu einem äußeren semidirekten Produkt von zyklischen Gruppen der Ordnung n bzw. 2.

Definition der Kommutatorgruppe

Definition (6.6)

Sei G eine Gruppe. Für beliebige $g, h \in G$ bezeichnet man das Element $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ als den Kommutator von g und h. Bezeichnet $S = \{[g, h] \mid g, h \in G\}$ die Menge aller Kommutoren in G, so wird die Untergruppe $G' = \langle S \rangle$ die Kommutatorgruppe von G genannt.

Für alle $g, h \in G$ gilt jeweils

$$gh \quad = \quad [g, h]hg.$$

Eigenschaft des Kommutators:

$$[g,h]hg = ghg^{-1}h^{-1}hg =$$
$$ghg^{-1}eg = ghgg^{-1} = ghe = gh$$

Die Bedeutung der Kommutatorgruppe

,

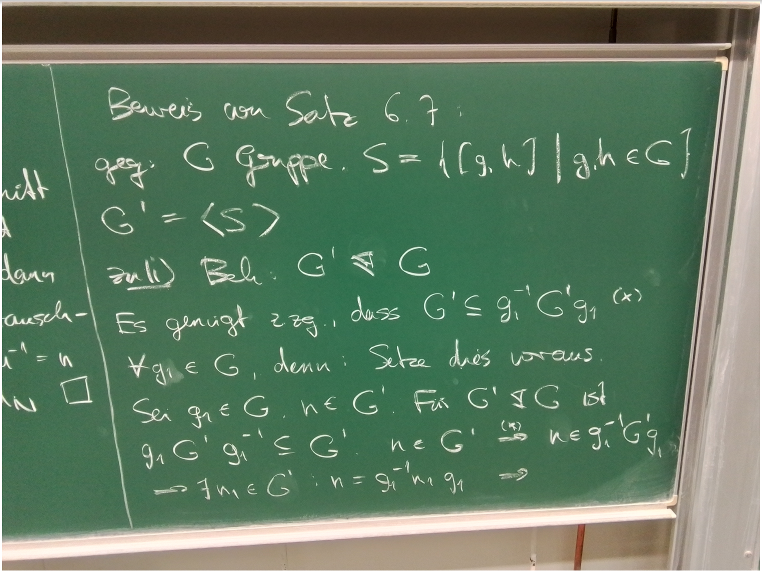
Satz (6.7)

Sei G eine Gruppe.

(i) Die Kommutatorgruppe G' ist ein Normalteiler von G.

(ii) Für einen beliebigen Normalteiler N von G gilt $N \supseteq G'$ genau dann, wenn die Faktorgruppe G/N abelsch ist.

Also ist G/G' die größte abelsche Faktorgruppe von G.



Korrektur:

In den unteren drei Zeilen sollte es heißen: „Für den Nachweis von $G' \trianglelefteq G$“ muss $g_1 n g_1^{-1} \in G'$ gezeigt werden.“

$$g_1 n g_1^{-1} = g_1 g_1^{-1} n_1 g_1 g_1^{-1} = n_1 \in G'$$

Wegen $G' = \langle S \rangle$ reicht es für $(*)$ zu überprüfen, dass $S \subseteq g_1^{-1} G' g_1$ gilt.

Sei also $s \in S$ vorgeg. $\Rightarrow \exists\, g, h \in G$ mit

$$s = [g, h] = g h g^{-1} h^{-1} = g_1^{-1} \underbrace{g_1 g h g^{-1} h^{-1} g_1^{-1}}_{} g_1$$

$$g_1^{-1} (g_1 g g_1^{-1})(g_1 h g_1^{-1})(g_1 g^{-1} g_1^{-1})(g_1 h^{-1} g_1^{-1}) g_1$$

$$= g_1^{-1} (g_1 g g_1^{-1})(g_1 h g_1)(g_1 g g_1^{-1})^{-1} (g_1 h g_1)^{-1} g_1$$

$$= g_1^{-1} [g_1 g g_1^{-1}, g_1 h g_1^{-1}] g_1 \in g_1^{-1} G' g_1^{-1}$$

zu (ii) Sei $N \trianglelefteq G$. Beh.: G/N abelsch $\Longleftrightarrow N \supseteq G'$

„$\Longrightarrow$" Seien $g, h \in G$. Beh.: $[g,h] \in N$

G/N abelsch $\Rightarrow (gN)(hN) = (hN)(gN) \Rightarrow$

$(gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} = e_{G/N} \Rightarrow ghg^{-1}h^{-1}N = N$

$\Rightarrow [g,h] = ghg^{-1}h^{-1} \in N$. Da G' von der Menge der Kommutatoren erzeugt wird, folgt aus Beh. $G' \subseteq N$.

„$\Longleftarrow$" Seien $g, h \in G$. z.zg.: $(gN)(hN) = (hN)(gN)$

Wie oben gezeigt, ist dies äquivalent zu $[g,h] \in N$.

Dies wiederum folgt aus der Vor. $G' \subseteq N$. $\square$

Höhere Kommutatorgruppen und Auflösbarkeit

Man definiert rekursiv

- $G^{(0)} = G$
- $G^{(n+1)} = (G^{(n)})'$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Die Untergruppen $G^{(n)}$ mit $n \geq 2$ werden die höheren Kommutatorgruppen von G genannt. Es gilt jeweils $G^{(n+1)} \trianglelefteq G^{(n)}$, und die Faktorgruppe $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ ist abelsch.

Definition (6.8)

Eine Gruppe G wird auflösbar genannt, wenn $G^{(n)} = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Jede abelsche Gruppe G ist auflösbar, wegen $G^{(1)} = \{e\}$.

Jede abelsche Gruppe G ist auflösbar, denn:

Für alle $g, h \in G$ gilt

$$[g,h] = ghg^{-1}h^{-1} = gg^{-1}hh^{-1} = ee = e$$

Da G' von den Kommutatoren erzeugt wird, folgt daraus $G^{(1)} = G' = \{e\}$.

Definition der Subnormalreihen

Definition (6.9)

Eine Subnormalreihe für eine Gruppe G ist eine Folge von Untergruppen der Form

$$G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq ... \supseteq N_r = \{e\}$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$, wobei für $0 \leq k < r$ jeweils $N_{k+1} \trianglelefteq N_k$ gilt. Die Faktorgruppen N_k/N_{k+1} bezeichnet man als Faktoren der Subnormalreihe. Sind alle Faktoren abelsch, dann spricht man von einer abelschen Subnormalreihe.

Proposition (6.10)

Jede endliche abelsche Gruppe besitzt eine Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Auflösbarkeit und Subnormalreihen

Satz (6.11)

Für eine endliche Gruppe G sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

(i) Die Gruppe G ist auflösbar.

(ii) Sie besitzt eine abelsche Subnormalreihe.

(iii) Sie hat eine Subnormalreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung.

Dabei ist die Äquivalenz „(i) $\Leftrightarrow$ (ii)“ auch für unendliche Gruppen gültig.

Jede abelsche Gruppe G ist auflösbar, denn:

Anwendungen von Satz 6.11:

(i) S_3 ist auflösbar, denn: Setze $N_0 = S_3$, $N_1 = A_3$, $N_2 = \{id\}$. $\Rightarrow S_3 = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 = \{e\}$

außerdem: $(S_3 : A_3) = 2 \Rightarrow A_3 \trianglelefteq S_3 \Rightarrow N_1 \trianglelefteq N_0$

$N_2 = \{e\} \trianglelefteq N_1$ offensichtlich. Die Faktorgruppe $N_0/N_1 = S_3/A_2$ ist von Primzahlordnung 2 und somit zyklisch und abelsch. Die Faktor $N_1/N_2 = A_3/\{e\} \widehat{=} A_3$ ist von Primzahlordnung 3 und somit ebenfalls abelsch.

(ii) Auch S_4 ist auflösbar, denn durch $N_0 = S_4$, $N_1 = A_4$, $N_2 = V_4$, $N_3 = \{id\}$ ist eine abelsche Normalreihe gegeben.

Überprüfung der Normalteiler-Eig.:

$(N_0 : N_1) = (S_4 : A_4) = 2 \Rightarrow N_1 \trianglelefteq N_0$

$N_3 = \{id\} \trianglelefteq N_2$ offensichtlich.

noch z.zg. $N_2 = V_4 \trianglelefteq A_4$

Es gilt sogar $V_4 \trianglelefteq S_4$, denn:

Sei $\sigma \in S_4$, $\tau \in V_4$. z.zg: $\sigma \tau \sigma^{-1} \in V_4$

S

A

„(i)

Setz

betr

Außer

Also

Subno

1\. Fall: $\tau = id \Rightarrow \sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\sigma^{-1} = id \in V_4$

2\. Fall: $\tau \neq id \Longrightarrow \exists\, i, j, k, l \in M_4$ mit

$\tau = (i\,j)(k\,l) \Rightarrow \sigma \circ (i\,j)(k\,l) \circ \sigma^{-1} =$

$(\sigma(i)\ \sigma(j))(\sigma(k)\ \sigma(l))$ (kann wg. $M_4 = \{\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k), \sigma(l)\}$ direkt überprüft werden) $\Rightarrow \sigma \circ (i\,j)(k\,l) \circ \sigma^{-1} \in V_4$

noch zu überprüfen: N_0/N_1, N_1/N_2, N_2/N_3 sind abelsch. $N_0/N_1 = S_4/A_4$ von Primzahlordnung 2 $\rightarrow$ abelsch

$|N_1/N_2| = |A_4/V_4| = (A_4 : V_4) = \frac{|A_4|}{|V_4|} = \frac{12}{4} = 3$

Primzahl $\Rightarrow N_1/N_2$ ist abelsch

$N_2/N_3 = V_4/\{id\} \cong V_4$ ist abelsch $\square$

Beweis von Satz 6.11

Sei G eine Gruppe. z.zg: Äquivalenz der Aussagen (i) G ist auflösbar

(ii) Es gibt eine abelsche Subnormalreihe.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor. $\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}_0 : G^{(n)} = \{e\}$.

Setze $N_k = G^{(k)}$ für $0 \le k \le n$. bereits bekannt: $G^{(k+1)} = (G^{(k)})' \trianglelefteq G^{(k)} \Rightarrow N_{k+1} \trianglelefteq N_k$

Außerdem ist $N_k/N_{k+1} = G^{(k)}/(G^{(k)})'$ jeweils abelsch.

Also ist durch $N_0 \supseteq \dots \supseteq N_n$ eine abelsche Subnormalreihe gegeben.

V_4

3

zahl -

$\frac{12}{4} = 3$

$\square$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Sei $G = N_0 \supseteq \ldots \supseteq N_r = \{e\}$
eine abelsche Subnormalreihe. Beh.:
Für $0 \leq k \leq r$ gilt jeweils $G^{(k)} \subseteq N_k$.
(Daraus folgt dann $G^{(r)} \subseteq N_r = \{e\}$, also die Auflösbarkeit von G.)

Beweis der Beh. durch vollst. Ind. über k.
Für $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich, wegen $N_0 = G = G^{(0)}$. Sei nun $k \in \{0, \ldots, r-1\}$, setze $G^{(k)} \subseteq N_k$ voraus. z.z.: $G^{(k+1)} \subseteq N_{k+1}$.
Wegen $G^{(k+1)} = \left(G^{(k)}\right)'$ genügt es zu überprüfen:
$[g, h] \in N_{k+1} \quad \forall g, h \in G^{(k)}$
N_k / N_{k+1} ist abelsch $\Rightarrow (g N_{k+1})(h N_{k+1}) =$

$(hN_{k+1})(gN_{k+1}) \Rightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in N_{k+1} \Rightarrow$

$[g,h] \in N_{k+1}$ für alle $g,h \in N_k$, wegen $G^{(k)} \subseteq N_k$

also erst recht für alle $g,h \in G^{(k)}$