Definition der Torsionsuntergruppen

Definition (5.2)

Sei G eine abelsche Gruppe und $m \in \mathbb{N}$.

(i) Man nennt $G[m] = \{g \in G \mid mg = 0_G\}$ die *m-Torsionsuntergruppe* von G.

(ii) Die Teilmenge $\mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G[n]$ wird die *Torsionsuntergruppe* von G genannt.

Zerlegung in Torsionsanteil und freien Anteil

Satz (5.5)

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathrm{Tor}(G)$. Darüber hinaus ist $\mathrm{Tor}(G)$ eine endliche abelsche Gruppe.

Zerlegung der Torsionsgruppen

Satz (5.7)

Sei G eine abelsche Gruppe.

(i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann gilt $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $G[n] = G$, und sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von n, mit $r \in \mathbb{N}_0$, Primzahlen $p_1, ..., p_r$ und Exponenten $e_1, ..., e_r \in \mathbb{N}$. Dann besteht ein Isomorphismus $G \cong G[p_1^{e_1}] \times ... \times G[p_r^{e_r}]$.

Satz (5.8)

Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann existiert ein Isomorphismus $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ abelscher Gruppen.

Zerlegung einer abelschen p^e-Torsionsgruppe

Satz (5.9)

Sei $e \in \mathbb{N}_0$, p eine Primzahl und G eine endliche abelsche Gruppe mit $G[p^e] = G$. Dann gibt es ein $r \in N_0$ und $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$, so dass

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p^{n_r}\mathbb{Z} \qquad \text{gilt.}$$

Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppe

Satz (5.10)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $d_1, ..., d_s \in \mathbb{N}$ mit

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}.$$

Dabei können die Zahlen d_i so gewählt werden, dass sie entweder

(i) alle Primzahlpotenzen sind oder

(ii) $d_i \mid d_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ erfüllt ist.

Im Fall (ii) gezeichnet man die Zahlen d_i als Elementarteiler der abelschen Gruppe.

Anwendung des Hauptsatzes:

Bestimmung aller abelschen Gruppen der Ordnung 100:

$100 = 2^2 \cdot 5^2$ Möglichkeiten, 100 als Produkt von Primzahlpotenzen > 1 darzustellen: $100 = 4 \cdot 25$

$= 2 \cdot 2 \cdot 25 = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$

Auf Grund von Satz 5.10 (ii) ist somit jede abelsche Gruppe der Ordnung 100 zu genau einer der Gruppen

$G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$,

$G_3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, $G_4 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$

Nach Satz 5.10 (ii) ist jede solche Gruppe aber auch isomorph zu einer der Gruppen $H_1 = \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$, $H_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$, $H_3 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, $H_4 = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

Auf Grund des Chinesischen Restsatzes gilt $G_1 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} = H_1$, ebenso: $G_2 \cong H_2$, $G_3 \cong H_3$ und $G_4 \cong H_4$

Proposition (6.1)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler und U eine Untergruppe von G. Dann ist jedem $u \in U$ durch $\tau_u(n) = unu^{-1}$ ein Automorphismus von N zugeordnet. Die Abbildung

$$\phi : U \to \mathrm{Aut}(N), \quad u \mapsto \tau_u$$

ist ein Homomorphismus von Gruppen.

Beweis von Prop. 6.1:

geg.: Gruppe G, $U \leq G$, $N \trianglelefteq G$

Für jedes $u \in U$ betrachte die Abb.
$\tau_u : N \to G,\ n \mapsto unu^{-1}$. Wegen
$N \trianglelefteq G$ ist dies eine Abb $N \to N$.

<u>Beh.</u>: $\tau_u \in \mathrm{Aut}(N)$ zu überprüfen

(i) Bijektivität (ii) τ_u ist Hom.

<u>zu (i)</u> Überprüfe, dass $\tau_{u^{-1}}$ die Umkehrabbildung von τ_u ist, d.h. dass $\tau_{u^{-1}} \circ \tau_u = \mathrm{id}_N$ und $\tau_u \circ \tau_{u^{-1}} = \mathrm{id}_N$ gilt.

Sei $n \in N$. Dann gilt $(\tau_{u^{-1}} \circ \tau_u)(n) =$
$\tau_{u^{-1}}(\tau_u(n)) = \tau_{u^{-1}}(unu^{-1}) = u^{-1}unu^{-1}(u^{-1})^{-1}$
$= ene = n = id_N(n)$, zweiter Nachweis analog.

zu (ii) Seien $n, n' \in N$. Dann gilt
$\tau_u(nn') = unn'u^{-1} = unen'u^{-1} = unu^{-1}un'u^{-1}$
$= \tau_u(n)\tau_u(n')$

Beh.: $\phi: U \to Aut(N)$, $u \mapsto \tau_u$ ist ein Gruppenhom.

Seien $u, v \in U$. z.zg.: $\phi(uv) = \phi(u) \circ \phi(v)$.
gleichbed.: $\tau_{uv} = \tau_u \circ \tau_v$. Sei $n \in N$.
Dann gilt $\tau_{uv}(n) = (uv)n(uv)^{-1} = uvnv^{-1}u^{-1}$
$= \tau_u(vnv^{-1}) = \tau_u(\tau_v(n)) = (\tau_u \circ \tau_v)(n)$ $\square$

Proposition (6.2)

Sei G eine Gruppe und inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$. Unter diesen Voraussetzungen ist G genau dann ein inneres direktes Produkt von N und U, wenn $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ für alle $u \in U$ gilt, wobei ϕ den Homomorphismus aus Proposition 6.1 bezeichnet.

Das äußere semidirekte Produkt

Satz (6.3)

Seien U und N Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Wir definieren auf $N \times U$ eine Verknüpfung $*$ durch

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) \quad = \quad (n_1 \phi(u_1)(n_2), u_1 u_2)$$

für $(n_1, u_1), (n_2, u_2) \in N \times U$. Dann ist $(N \times U, *)$ eine Gruppe. Man nennt sie das äußere semidirekte Produkt von N und U und bezeichnet sie mit $N \rtimes_\phi U$.

zur Definition der Verknüpfung auf $N \rtimes_\phi U$:

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = (n_1 \phi(u_1)(n_2),\ u_1 u_2)$$

$n_2 \mapsto \phi(u_1)(n_2)$

Zum Beweis von Satz 6.3

(i) Assoziativität: Seien $(n_1,u_1), (n_2,u_2), (n_3,u_3) \in N \times U$ vorgeg. z.zg.: $((n_1,u_1)*(n_2,u_2))*(n_3,u_3) =$
$(n_1,u_1)*((n_2,u_2)*(n_3,u_3))$

linke Seite: $((n_1,u_1)*(n_2,u_2))*(n_3,u_3) =$
$(n_1\phi(u_1)(n_2),\ u_1u_2)*(n_3,u_3) =$
$(n_1\phi(u_1)(n_2)\phi(u_1u_2)(n_3),\ u_1u_2u_3)$

rechte Seite: $(n_1, u_1) * \left((n_2, u_2) * (n_3, u_3)\right) =$

$(n_1, u_1) * \left(n_2 \phi(u_2)(n_3), u_2 u_3\right) \overset{\phi(u_1)\text{ Hom}}{=}$

$\left(n_1 \phi(u_1)\left(n_2 \phi(u_2)(n_3)\right), u_1 u_2 u_3\right) =$

$\left(n_1 \phi(u_1)(n_2) \phi(u_1)\left(\phi(u_2)(n_3)\right), u_1 u_2 u_3\right) =$

$\left(n_1 \phi(u_1)(n_2)\left(\phi(u_1) \circ \phi(u_2)\right)(n_3), u_1 u_2 u_3\right) \overset{\phi\text{ Hom.}}{=}$

$\left(n_1 \phi(u_1)(n_2) \phi(u_1 u_2)(n_3), u_1 u_2 u_3\right)$

(ii) Existenz eines Neutralelements:

Sei $(n, u) \in N \times U$. Dann gilt $(n, u) * (e_N, e_U)$

$= (n \phi(u)(e_N), u e_U) = (n e_N, u) = (n, u)$

$(e_N, e_U) * (n, u) = (e_N \phi(e_U)(n), e_U u) \overset{\phi(e_U) = id_N}{=}$

$(e_N\, id_N(n), u) = (e_N n, u) = (n, u)$

Also ist $e_{N \rtimes_\phi U} = (e_N, e_U)$ ein Neutralelement der Halbgruppe $(N \times U, *)$

(iii) Existenz der Inversen

Sei $(n, u) \in N \times U$. Für alle $(n_1, u_1) \in N \times U$ gilt die Äquivalenz $(n, u) * (n_1, u_1) = e_{N \rtimes_\phi U}$

$$\iff (n\phi(u)(n_1), uu_1) = (e_N, e_U) \iff$$

$$n\phi(u)(n_1) = e_N \wedge uu_1 = e_U \iff$$

$$u_1 = u^{-1} \wedge \phi(u)(n_1) = n^{-1} \iff$$

$$u_1 = u^{-1} \wedge \phi(u_1)\big(\phi(u)(n_1)\big) = \phi(u_1)(n^{-1}) \iff$$

$$u_1 = u^{-1} \wedge (\phi(u_1) \circ \phi(u))(n_1) = \phi(u_1)(n^{-1}) \iff$$

$u_1 = u^{-1} \wedge \phi(u_1 u)(n_1) = \phi(u_1)(n^{-1}) \iff$

$u_1 = u^{-1} \wedge \phi(e_U)(n_1) = \phi(u_1)(n^{-1}) \iff$

$u_1 = u^{-1} \wedge id_N(n_1) = \phi(u_1)(n^{-1}) \iff$

$u_1 = u^{-1} \wedge n_1 = \phi(u^{-1})(n^{-1})$

Die Rechnung zeigt, dass $(n,u) * (\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1}) = e_{N \rtimes_\phi U}$ gilt. $(\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1}) * (n,u) =$

$(\phi(u^{-1})(n^{-1})\,\phi(u^{-1})(n), u^{-1}u) =$

$(\phi(u^{-1})(n^{-1}n), e_U) = (\phi(u^{-1})(e_N), e_U) =$

$(e_N, e_U) = e_{N \rtimes_\phi U}$. Insgesamt gilt also $(n,u)^{-1} = (\phi(u^{-1})(n^{-1}), u^{-1})$ im Monoid $(N \times U, *)$

$\square$

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Sei $N = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ und $U = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$. Sei $\iota \in \mathrm{Aut}(N)$ geg. durch $\iota(a) = -a \ \forall a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. (Es ist $\iota = \tau_{-1}$ in der Notation von § 7.) überprüfe: Die Abb. $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(N)$ geg. durch $\bar{0} \mapsto id_N$, $\bar{1} \mapsto \iota$ ist ein Homomorphismus.

Sei nun $G = N \rtimes_\phi U = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes_\phi (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Betrachte $g = (\bar{1}, \bar{0})$, $h = (\bar{0}, \bar{1})$.

$g * g = (\bar{1}, \bar{0}) * (\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{1} + \phi(\bar{0})(\bar{1}), \bar{0} + \bar{0}) =$

$(\bar{1} + id_N(\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{1} + \bar{1}, \bar{0}) = (\bar{2}, \bar{0})$

$$g^3 = g^2 * g = (\bar{2},\bar{0}) * (\bar{1},\bar{0}) = (\bar{2}+\phi(\bar{0})(\bar{1}), \bar{0}+\bar{0}) =$$

$$(\bar{2}+ id_N(\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{2}+\bar{1}, \bar{0}) = (\bar{3},\bar{0})$$

Durch vollst. Ind. ist leicht zu sehen, dass $g^m = (\bar{m},\bar{0})\ \forall m \in \mathbb{N}$ gilt.

$$h * h = (\bar{0},\bar{1}) * (\bar{0},\bar{1}) = (\bar{0}+\phi(\bar{1})(\bar{0}), \bar{1}+\bar{1}) =$$

$$(\bar{0}+\iota(\bar{0}), \bar{1}+\bar{1}) = (\bar{0}+(-\bar{0}), \bar{0}) = (\bar{0},\bar{0}) = e_G$$

$$g * h = (\bar{1},\bar{0}) * (\bar{0},\bar{1}) = (1+\phi(\bar{0})(\bar{0}), \bar{0}+\bar{1}) = (\bar{1},\bar{1})$$

$$g * h * g * h = (\bar{1},\bar{1}) * (\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1}+\phi(\bar{1})(\bar{1}), \bar{1}+\bar{1}) =$$

$$(\bar{1}+\iota(\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{1}+(-\bar{1}), \bar{0}) = (\bar{0},\bar{0}) = e_G$$

$$\Longrightarrow h * g * h = g^{-1} \overset{h^2=e_G}{\Longrightarrow} h * g * h^{-1} = g^{-1}$$

Man kann leicht überprüfen, dass G isomorph zur Diedergruppe D_n ist.

Inneres und äußeres semidirektes Produkt

Satz (6.4)

Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe und N ein Normalteiler von G. Wir setzen voraus, dass G das innere semidirekte Produkt N und U ist. Definieren wir $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in Proposition 6.1, dann ist durch $(n, u) \mapsto nu$ ein Isomorphismus $N \rtimes_\phi U \cong G$ definiert.

Beweis von Satz 6.4:

Vor.: G ist inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und U z.zg.: $\psi: N \rtimes_\phi U \to G, (n,u) \mapsto nu$ ist ein Isomorphismus

bereits bekannt: Aus $N \cap U = \{e\}$ und $NU = G$ folgt, dass ψ eine Bijektion ist. noch zu zeigen: ψ ist ein Gruppenhom.

Erinnerung: $\phi: U \to \mathrm{Aut}(N)$ ist geg. durch $u \mapsto \tau_u$, wobei $\tau_u(n) = unu^{-1}$ $\forall n \in N, u \in U$.

Seien $(n,u), (n_1,u_1) \in N \times U$ vorgeg. zu überprüfen:

$$\psi((n,u) * (n_1,u_1)) = \psi(n,u) \cdot \psi(n_1,u_1)$$

Seien $(n,u),(n_1,u_1) \in N \times U$

$$\psi((n,u) * (n_1,u_1)) = \psi(n,u) \cdot \psi(n_1,u_1)$$

rechte Seite: $\psi(n,u) \cdot \psi(n_1,u_1) = n u n_1 u_1$

linke Seite: $\psi((n,u) * (n_1,u_1)) = \psi(n \phi(u)(n_1), u u_1)$

$n \phi(u)(n_1) u u_1 = n \tau_u(n_1) u u_1 = n(u n_1 u^{-1}) u u_1 =$

$n u n_1 e u_1 = n u n_1 u_1$ $\square$