§ 5. Endlich erzeugte abelsche Gruppen

Ziele:

- Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe ist ein direktes Produkt zyklischer Gruppen, genauer:
- Jede endliche abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

  $$\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

  mit $r \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.
- Jede endliche erzeugte abelsche Gruppe hat bis auf Isomorphie die Form

  $$\mathbb{Z}^s \times \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/p_r^{e_r}\mathbb{Z}$$

  mit $r, s \in \mathbb{N}_0$, $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$.

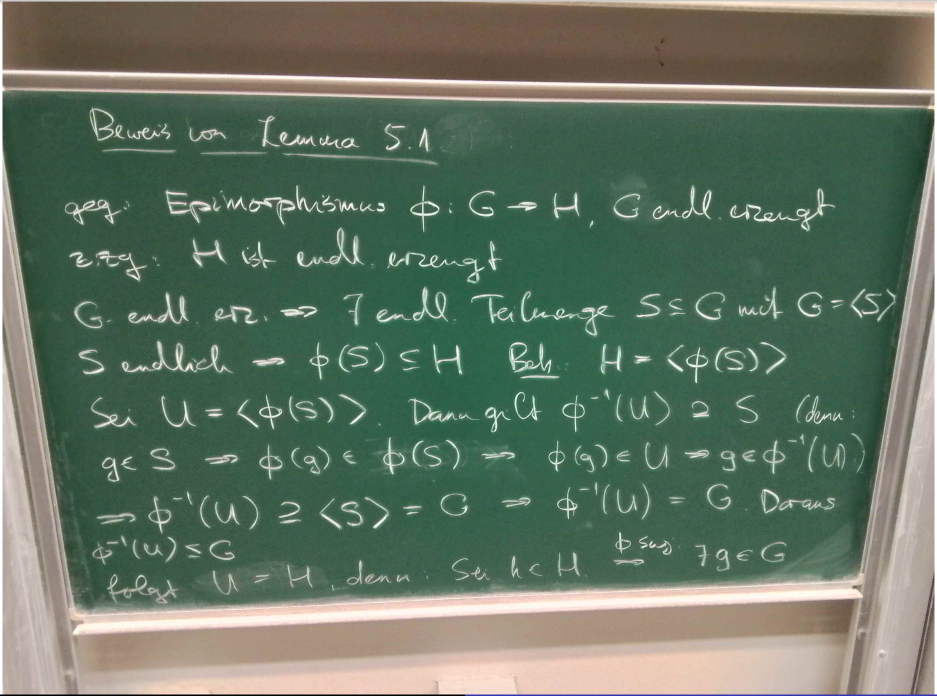
Surjektive Bilder endlich erzeugter Gruppen

Lemma (5.1)

Seien G, H beliebige Gruppen. Ist G endlich erzeugt und existiert ein surjektiver Homomorphismus $\phi : G \to H$, dann ist auch H endlich erzeugt.

additive Notation:

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe, und seien $U, V \leq G$. die Schreibweise $G = U \oplus V$ bedeutet, dass G ein inneres direktes Produkt von U und V ist.



Beweis von Lemma 5.1

geg: Epimorphismus $\phi: G \to H$, G endl. erzeugt

z.zg: H ist endl. erzeugt

G endl. erz. $\Rightarrow \exists$ endl. Teilmenge $S \subseteq G$ mit $G = \langle S \rangle$

S endlich $\Rightarrow \phi(S) \subseteq H$ Beh: $H = \langle \phi(S) \rangle$

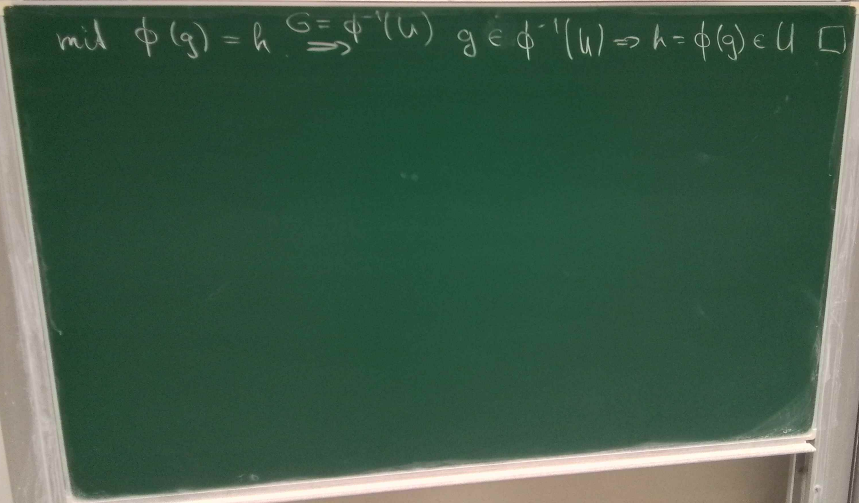
Sei $U = \langle \phi(S) \rangle$. Dann gilt $\phi^{-1}(U) \supseteq S$ (denn:

$g \in S \Rightarrow \phi(g) \in \phi(S) \Rightarrow \phi(g) \in U \Rightarrow g \in \phi^{-1}(U)$)

$\Rightarrow \phi^{-1}(U) \supseteq \langle S \rangle = G \Rightarrow \phi^{-1}(U) = G$. Daraus

$\phi^{-1}(U) \leq G$

folgt $U = H$, denn: Sei $h \in H$. $\xrightarrow{\phi \text{ surj.}} \exists g \in G$



mit $\phi(g) = h \overset{G=\phi^{-1}(U)}{\Longrightarrow} g \in \phi^{-1}(U) \Rightarrow h = \phi(g) \in U$ $\square$

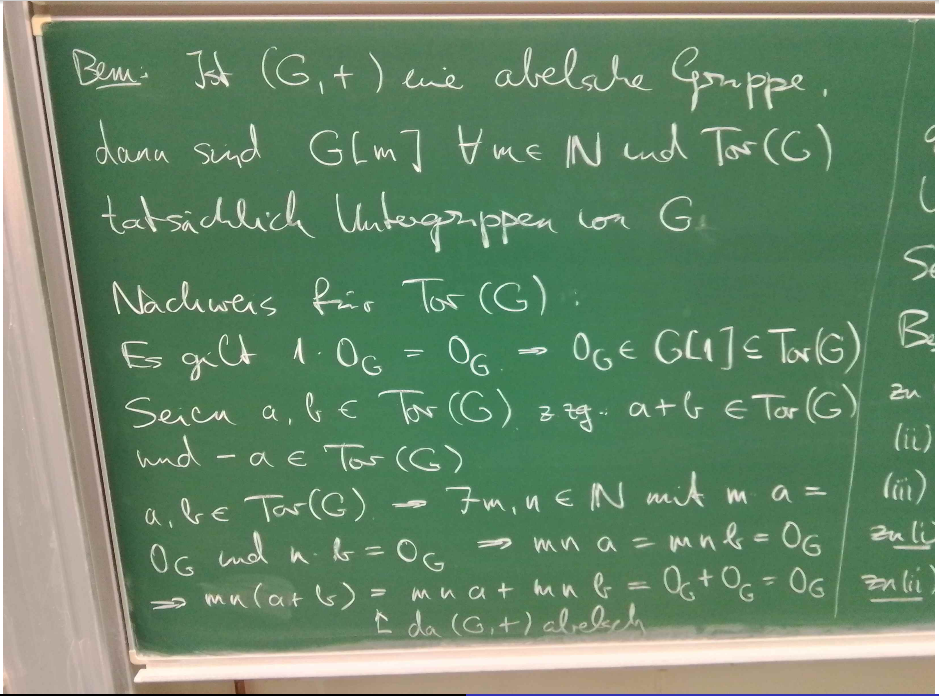
Definition der Torsionsuntergruppen

Definition (5.2)

Sei G eine abelsche Gruppe und $m \in \mathbb{N}$.

(i) Man nennt $G[m] = \{g \in G \mid mg = 0_G\}$ die *m*-Torsionsuntergruppe von G.

(ii) Die Teilmenge $\mathrm{Tor}(G) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G[n]$ wird die Torsionsuntergruppe von G genannt.



Bem.: Ist $(G,+)$ eine abelsche Gruppe, dann sind $G[m]$ $\forall m \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Tor}(G)$ tatsächlich Untergruppen von G.

Nachweis für $\mathrm{Tor}(G)$:

Es gilt $1 \cdot 0_G = 0_G \Rightarrow 0_G \in G[1] \subseteq \mathrm{Tor}(G)$

Seien $a, b \in \mathrm{Tor}(G)$ z.zg.: $a+b \in \mathrm{Tor}(G)$ und $-a \in \mathrm{Tor}(G)$

$a, b \in \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot a = 0_G$ und $n \cdot b = 0_G \Rightarrow mn\,a = mn\,b = 0_G$

$$\Rightarrow mn(a+b) \underset{\text{da } (G,+) \text{ abelsch}}{=} mn\,a + mn\,b = 0_G + 0_G = 0_G$$

g

(

Se

Be

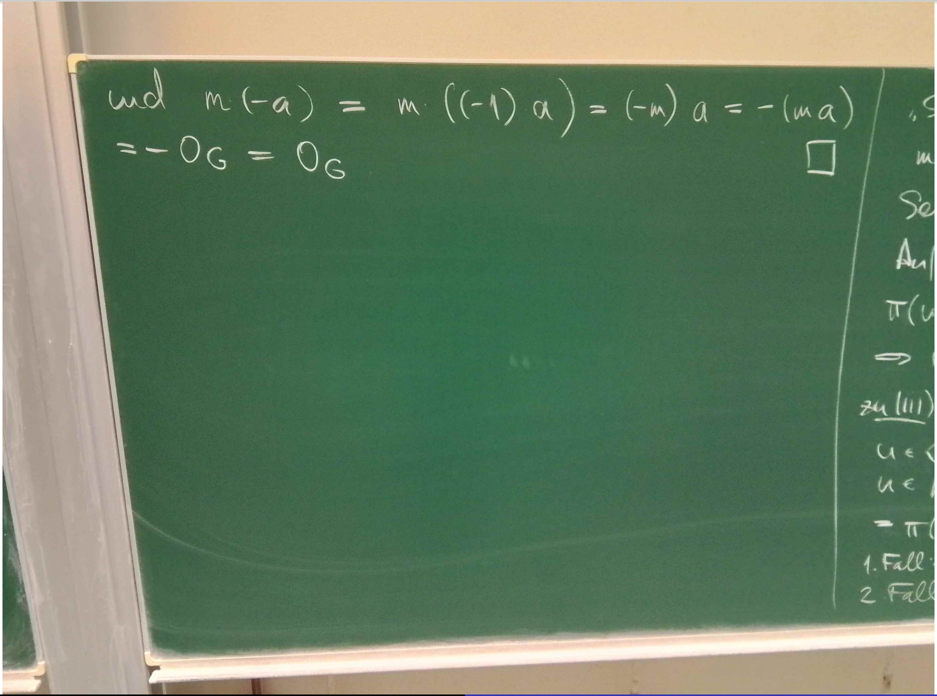
zu

(ii)

(iii)

zu (i

zu (ii)



und $m\cdot(-a) = m\cdot((-1)\,a) = (-m)\,a = -(ma)$

$= -0_G = 0_G$ □

„S

m

Se

Au

$\pi(u$

$\Rightarrow$

<u>zu (iii)</u>

$u \in$

$u \in$

$= \pi($

1. Fall

2. Fall

Definition der Torsionsfreiheit

Definition (5.3)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(i) Wir bezeichnen G als torsionsfrei, wenn $\mathrm{Tor}(G) = \{0_G\}$ gilt.

(ii) Die Gruppe G ist frei, wenn für ein $r \in \mathbb{N}_0$ ein Isomorphismus zwischen G und $(\mathbb{Z}^r, +)$ existiert, wobei $\mathbb{Z}^0 = \{0\}$ gesetzt wird.

Freie und torsionsfreie endliche abelsche Gruppen

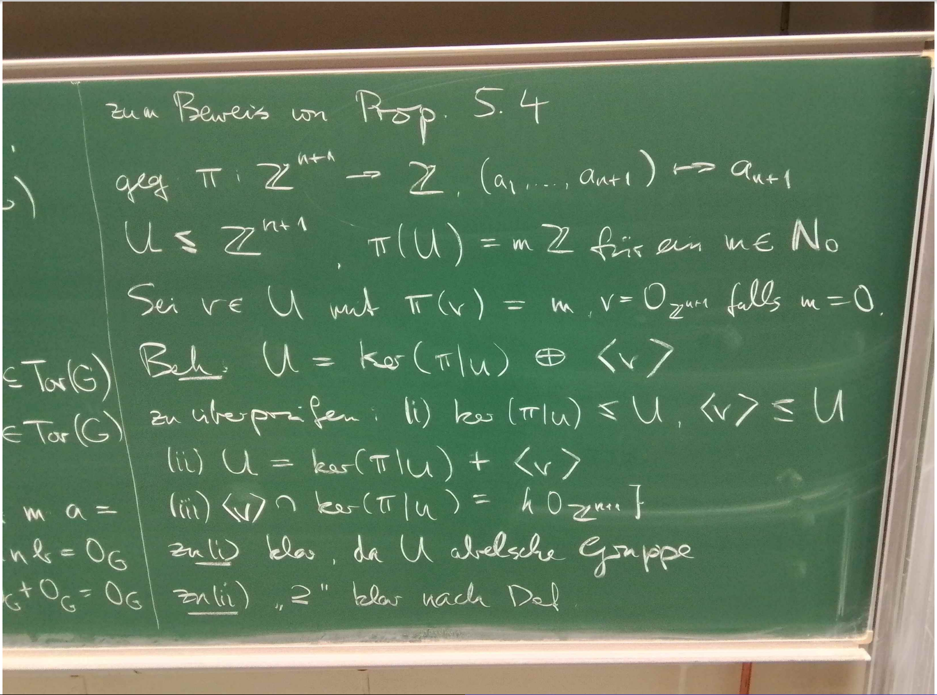
Proposition (5.4)

(i) Jede Untergruppe einer freien endlich erzeugten abelschen Gruppe ist eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.

(ii) Jede torsionsfreie endlich erzeugte abelsche Grupe ist frei.

Beweisskizze zu Proposition 5.4 (i)

- Rückführung des Beweises auf eine Untergruppe U von $\mathbb{Z}^n$
- Beweis der Aussage durch vollständige Induktion über n
- Für den Induktionsschritt betrachte die Projektion $\pi : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}$ auf die letzte Komponente.
- Auf $\ker(\pi|_U)$ kann die Induktionsvoraussetzung angewendet werden, und es gilt $\pi(U) = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Es folgt $\ker(\pi|_U) \cong \mathbb{Z}^s$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$ und $\pi(U) \cong \mathbb{Z}^t$ mit $t \in \{0, 1\}$.
- Die Untergruppe U ist inneres direktes Produkt von $\ker(\pi|_U)$ und $\langle v \rangle$, falls $v \in U$ mit $\pi(v) = m$ ist, mit $v = 0_{\mathbb{Z}^{n+1}}$ falls $m = 0$. Man erhält so einen Isomorphismus $U \cong \ker(\pi|_U) \times \pi(U) \cong \mathbb{Z}^{s+t}$.



zum Beweis von Prop. 5.4

geg $\pi : \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}, \ (a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto a_{n+1}$

$U \leq \mathbb{Z}^{n+1}$, $\pi(U) = m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

Sei $v \in U$ mit $\pi(v) = m$, $v = 0_{\mathbb{Z}^{n+1}}$ falls $m = 0$.

<u>Beh</u>: $U = \ker(\pi|_U) \oplus \langle v \rangle$

zu überprüfen: (i) $\ker(\pi|_U) \leq U$, $\langle v \rangle \leq U$

(ii) $U = \ker(\pi|_U) + \langle v \rangle$

(iii) $\langle v \rangle \cap \ker(\pi|_U) = \{0_{\mathbb{Z}^{n+1}}\}$

zu (i) klar, da U abelsche Gruppe

zu (ii) „$\supseteq$" klar nach Def.

$)$

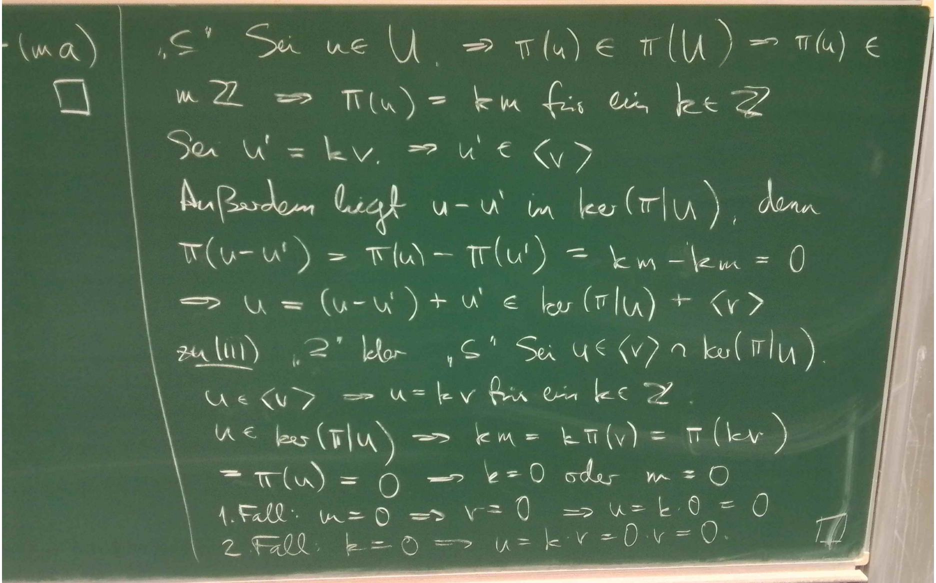
$\in \mathrm{Tor}(G))$

$\in \mathrm{Tor}(G)$

$m \cdot a =$

$n b = 0_G$

${}_G + 0_G = 0_G$



(ma)

$\square$

„$\subseteq$" Sei $u \in U$. $\Rightarrow \pi(u) \in \pi(U) \Rightarrow \pi(u) \in m\mathbb{Z} \Rightarrow \pi(u) = km$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

Sei $u' = kv$. $\Rightarrow u' \in \langle v \rangle$

Außerdem liegt $u - u'$ in $\ker(\pi|_U)$, denn

$\pi(u-u') = \pi(u) - \pi(u') = km - km = 0$

$\Rightarrow u = (u-u') + u' \in \ker(\pi|_U) + \langle v \rangle$

<u>zu (iii)</u> „$\supseteq$" klar „$\subseteq$" Sei $u \in \langle v \rangle \cap \ker(\pi|_U)$.

$u \in \langle v \rangle \Rightarrow u = kv$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

$u \in \ker(\pi|_U) \Rightarrow km = k\pi(v) = \pi(kv)$
$= \pi(u) = 0 \Rightarrow k = 0$ oder $m = 0$

1. Fall: $m = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow u = k \cdot 0 = 0$
2. Fall: $k = 0 \Rightarrow u = k \cdot v = 0 \cdot v = 0$.

$\square$

Beweisskizze zu Proposition 5.4 (ii)

- Sei S ein endliches Erzeugendensystem von G und $T = \{g_1, ..., g_n\} \subseteq S$ maximal mit der Eigenschaft, dass $\phi(a_1, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k g_k$ injektiv ist. Dann ist $U = \langle T \rangle$ eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.
- Zeige mit Hilfe der Maximalität: Für jedes $g \in S$ gibt es ein $a_g \in \mathbb{N}$ mit $a_g g \in U$ (mit $a_g = 1$ falls $g \in T$).
- Da S endlich ist, gilt $aS \subseteq U$ für ein $a \in \mathbb{N}$, und somit auch $aG \subseteq U$. Nach (i) ist mit U auch aG eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.
- Auf Grund der Torsionsfreiheit ist $G \to aG$, $g \mapsto ag$ eine injektive Abbildung, es gilt also $G \cong aG$. Also ist auch G eine freie endlich erzeugte abelsche Gruppe.

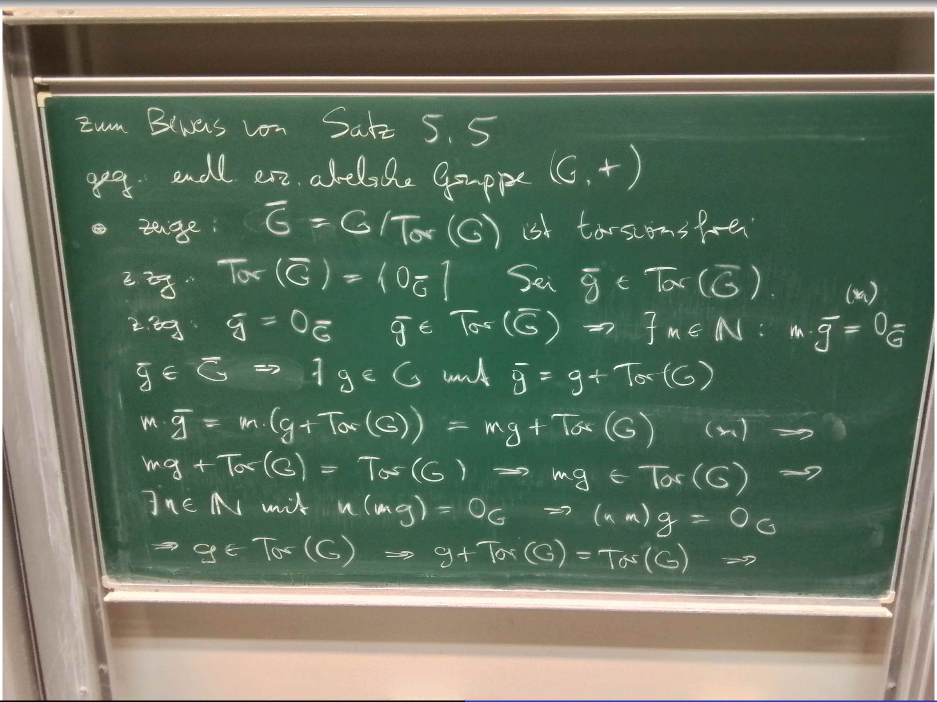
Zerlegung in Torsionsanteil und freien Anteil

Satz (5.5)

Ist G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $G \cong \mathbb{Z}^r \times \mathrm{Tor}(G)$. Darüber hinaus ist $\mathrm{Tor}(G)$ eine endliche abelsche Gruppe.

Beweisskizze zu Satz 5.5

- Zeige, dass die Faktorgruppe $G/\mathrm{Tor}(G)$ torsionsfrei und somit nach Proposition 5.4 (ii) isomorph zu $\mathbb{Z}^r$ ist, für ein $r \in \mathbb{N}_0$.
- Stelle G als inneres direktes Produkt von $\mathrm{Tor}(G)$ und einer Untergruppe U von G isomorph zu $\mathbb{Z}^r$ dar. (Die Untergruppe U wird erzeugt durch die Urbilder der Einheitsvektoren $e_1, ..., e_r \in \mathbb{Z}^r$ unter dem Homomorphismus $G \to \mathbb{Z}^r$, den man durch den Isomorphismus $G/\mathrm{Tor}(G) \cong \mathbb{Z}^r$ enthält.)
- Die Gruppe $\mathrm{Tor}(G)$ ist als surjektives Bild einer endlich erzeugten Gruppe nach Lemma 5.1 ebenfalls endlich erzeugt.
- Da alle Elemente in $\mathrm{Tor}(G)$ endliche Ordnung haben, folgt daraus, dass $\mathrm{Tor}(G)$ endlich ist.



zum Beweis von Satz 5.5

geg.: endl. erz. abelsche Gruppe $(G, +)$

⊛ zeige: $\bar{G} = G/\mathrm{Tor}(G)$ ist torsionsfrei

z.zg.: $\mathrm{Tor}(\bar{G}) = \{0_{\bar{G}}\}$ Sei $\bar{g} \in \mathrm{Tor}(\bar{G})$.

z.zg.: $\bar{g} = 0_{\bar{G}}$ $\bar{g} \in \mathrm{Tor}(\bar{G}) \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : m \cdot \bar{g} = 0_{\bar{G}}$ $(*_1)$

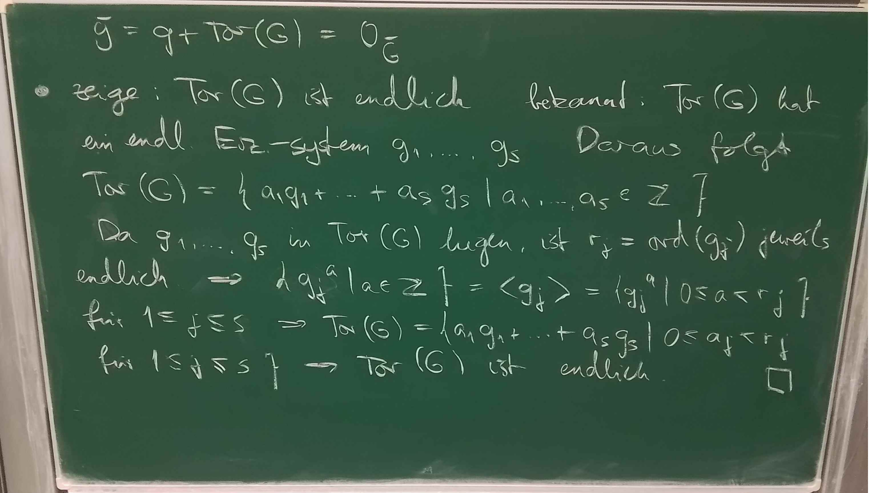
$\bar{g} \in \bar{G} \Rightarrow \exists g \in G$ mit $\bar{g} = g + \mathrm{Tor}(G)$

$m \cdot \bar{g} = m \cdot (g + \mathrm{Tor}(G)) = mg + \mathrm{Tor}(G) \overset{(*_1)}{\Rightarrow}$

$mg + \mathrm{Tor}(G) = \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow mg \in \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow$

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $n(mg) = 0_G \Rightarrow (nm)g = 0_G$

$\Rightarrow g \in \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow g + \mathrm{Tor}(G) = \mathrm{Tor}(G) \Rightarrow$



$\bar{g} = g + \mathrm{Tor}(G) = 0_{\bar{G}}$

- zeige: Tor(G) ist endlich   bekannt: Tor(G) hat ein endl. Erz.-system $g_1, \ldots, g_s$ Daraus folgt

$\mathrm{Tor}(G) = \{ a_1 g_1 + \ldots + a_s g_s \mid a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{Z} \}$

Da $g_1, \ldots, g_s$ in Tor(G) liegen, ist $r_j = \mathrm{ord}(g_j)$ jeweils endlich $\Rightarrow \{ g_j^a \mid a \in \mathbb{Z} \} = \langle g_j \rangle = \{ g_j^a \mid 0 \leq a < r_j \}$ für $1 \leq j \leq s$ $\Rightarrow \mathrm{Tor}(G) = \{ a_1 g_1 + \ldots + a_s g_s \mid 0 \leq a_j < r_j$ für $1 \leq j \leq s \}$ $\Rightarrow$ Tor(G) ist endlich. □

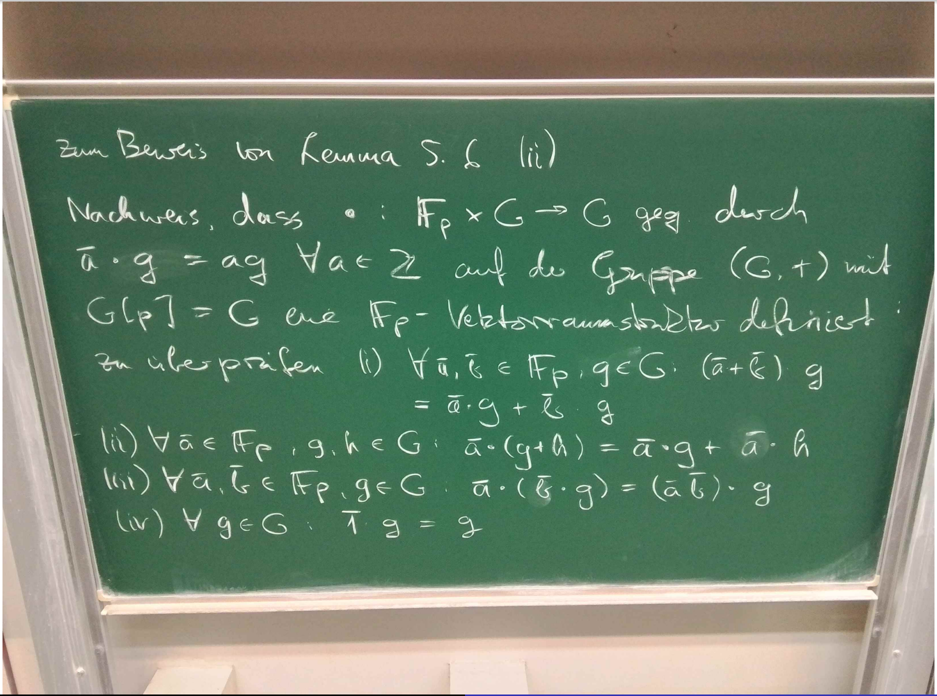
Die $\mathbb{F}_p$-Vektorraumstruktur auf p-Torsionsgruppen

Lemma (5.6)

(i) Sei G eine abelsche Gruppe, seien $s \in \mathbb{N}_0$, $m_1, ..., m_s \in \mathbb{N}$ und $g_1, ..., g_s \in G$ mit $\mathrm{ord}(g_i) \mid m_i$ für $1 \leq i \leq s$. Sei $U = \langle g_1, ..., g_s \rangle$. Dann gibt es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/m_s\mathbb{Z} \to U$ mit

$$\phi(\bar{a}_1, ..., \bar{a}_s) = a_1 g_1 + ... + a_s g_s \qquad \text{für alle } a_1, ..., a_s \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Ist G eine abelsche Gruppe mit $G[p] = G$, dann gibt es eine Abbildung $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ mit $\bar{a} \cdot g = ag$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ und $g \in G$. Mit dieser Abbildung wird auf G die Struktur eines $\mathbb{F}_p$-Vektorraums definiert.



Zum Beweis von Lemma 5.6 (ii)

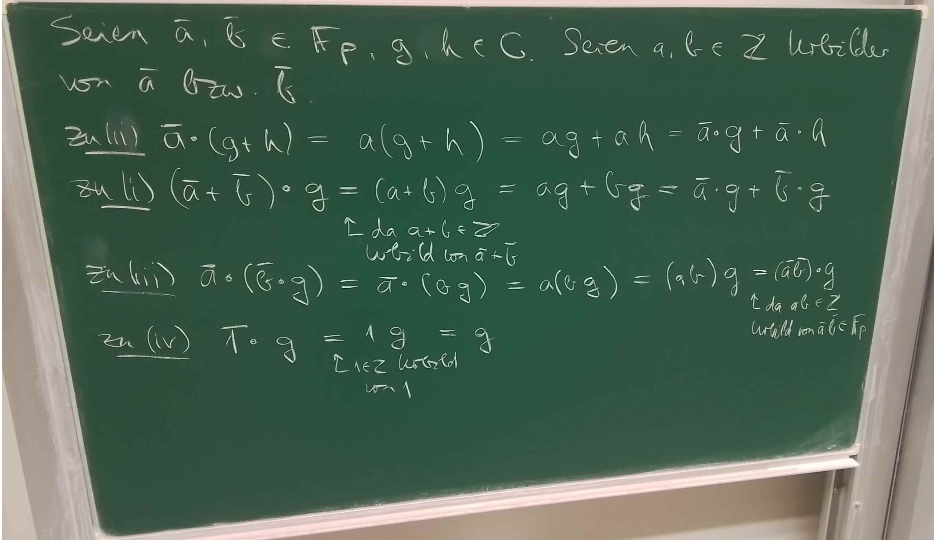
Nachweis, dass $\cdot : \mathbb{F}_p \times G \to G$ geg. durch $\bar{a} \cdot g = ag \;\forall a \in \mathbb{Z}$ auf der Gruppe $(G,+)$ mit $G[p] = G$ eine $\mathbb{F}_p$-Vektorraumstruktur definiert:

zu überprüfen (i) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}_p, g \in G: (\bar{a}+\bar{b}) \cdot g = \bar{a} \cdot g + \bar{b} \cdot g$

(ii) $\forall \bar{a} \in \mathbb{F}_p, g, h \in G: \bar{a} \cdot (g+h) = \bar{a} \cdot g + \bar{a} \cdot h$

(iii) $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}_p, g \in G: \bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot g) = (\bar{a}\bar{b}) \cdot g$

(iv) $\forall g \in G: \bar{1} \cdot g = g$



Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{F}_p$, $g, h \in G$. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ Urbilder von $\bar{a}$ bzw. $\bar{b}$.

zu (ii) $\bar{a} \cdot (g+h) = a(g+h) = ag + ah = \bar{a} \cdot g + \bar{a} \cdot h$

zu (i) $(\bar{a} + \bar{b}) \cdot g = (a+b)g = ag + bg = \bar{a} \cdot g + \bar{b} \cdot g$

↑ da $a+b \in \mathbb{Z}$ Urbild von $\bar{a} + \bar{b}$

zu (iii) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot g) = \bar{a} \cdot (bg) = a(bg) = (ab)g = (\bar{a}\bar{b}) \cdot g$

↑ da $ab \in \mathbb{Z}$ Urbild von $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{F}_p$

zu (iv) $\bar{1} \cdot g = 1g = g$

↑ $1 \in \mathbb{Z}$ Urbild von 1

Zerlegung der Torsionsgruppen

Satz (5.7)

Sei G eine abelsche Gruppe.

(i) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann gilt $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $G[n] = G$, und sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung von n, mit $r \in \mathbb{N}_0$, Primzahlen $p_1, ..., p_r$ und Exponenten $e_1, ..., e_r \in \mathbb{N}$. Dann besteht ein Isomorphismus $G \cong G[p_1^{e_1}] \times ... \times G[p_r^{e_r}]$.

Beweis von Satz 5.7 (i)

geg: abelsche Gruppe G, $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd

z.zg: $G[mn] \cong G[m] \times G[n]$, genügt:

$$G[mn] = G[m] \oplus G[n]$$

Es gilt $G[m] \subseteq G[mn]$, denn: Ist $g \in G[m]$, dann folgt $mg = 0_G$, somit auch $(mn) \cdot g = n \cdot (mg) = n \cdot 0_G = 0_G$, also $g \in G[mn]$. Ebenso gilt $G[n] \subseteq G[mn]$. Da G abelsch ist, sind $G[m]$ und $G[n]$ als Untergr. von $G[mn]$ auch Normalteiler.

noch zu überprüfen: (i) $G[m] \cap G[n] = \{0_G\}$

(ii) $G[m] + G[n] = G[mn]$

zu (i) „$\supseteq$" klar „$\subseteq$" Sei $g \in G[m]$ und $g \in G[n]$

$\Rightarrow m \cdot g = n \cdot g = 0_G$ Lemma von Bézout $\Rightarrow$

$\exists k, l \in \mathbb{Z}$ mit $km + ln = 1 \Rightarrow g = 1 \cdot g$

$= (km + ln) \cdot g = k \cdot (mg) + l \cdot (ng) = k \cdot 0_G$

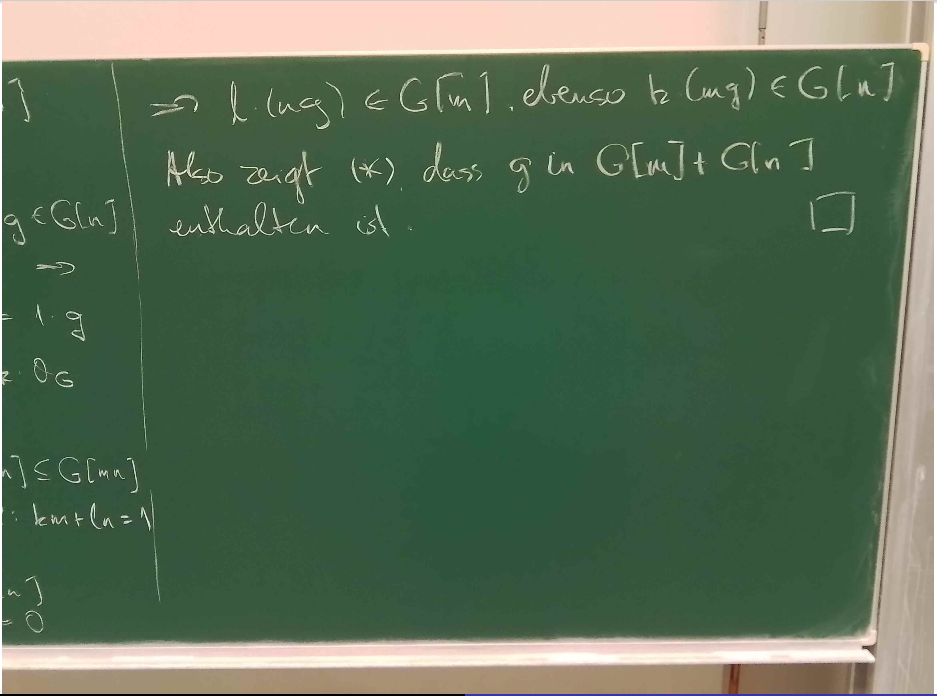
$+ l \cdot 0_G = 0_G$

zu (ii) „$\subseteq$" folgt direkt aus $G[m], G[n] \leq G[mn]$

Sei $g \in G[mn]$. Bézout $\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: km + ln = 1$

s.o. $\Rightarrow g \overset{(*)}{=} l \cdot (ng) + k \cdot (mg)$

$m(l \cdot (ng)) = l \cdot (mng) \overset{g \in G[mn]}{=} l \cdot 0_G = 0$



$]$

$g \in G[n]$

$\Rightarrow$

$= 1 \cdot g$

$\cdot\, 0_G$

$] \subseteq G[mn]$

$: km + ln = 1$

$]$

$= 0$

$\Rightarrow l \cdot (ng) \in G[m]$, ebenso $k(mg) \in G[n]$

Also zeigt (*), dass g in $G[m] + G[n]$ enthalten ist. $\square$

Der Chinesische Restsatz

Satz (5.8)

Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann existiert ein Isomorphismus $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ abelscher Gruppen.

Beweis:

- Sei $U = \langle n + (mn)\mathbb{Z} \rangle$ und $V = \langle m + (mn)\mathbb{Z} \rangle$.
- Weil $n + (mn)\mathbb{Z} = n \cdot (1 + (mn)\mathbb{Z})$ ein Element der Ordnung m ist, gilt $U \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Ebenso zeigt man $V \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Man überprüft nun, dass $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z}$ ein inneres direktes Produkt von U und V ist.
- Daraus folgt $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \cong U \times V$.
- Ingesamt erhalten wir $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Zerlegung einer abelschen p^e-Torsionsgruppe

Satz (5.9)

Sei $e \in \mathbb{N}_0$, p eine Primzahl und G eine endliche abelsche Gruppe mit $G[p^e] = G$. Dann gibt es ein $r \in N_0$ und $n_1, ..., n_r \in \mathbb{N}$, so dass

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p^{n_2}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p^{n_r}\mathbb{Z} \qquad \text{gilt.}$$

Beweis:

- Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über e. Im Fall $e = 0$ ist $G = \{0_G\}$ und die Aussage offensichtlich.
- Im Induktionsschritt betrachten wir die Gruppe $H = pG$ mit $H[p^{e-1}] = H$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Isomorphismus

$$\phi : \mathbb{Z}/p^{n_1}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p^{n_r}\mathbb{Z} \to H.$$

Beweis von Satz 5.9 (Forts.)

- Es seien $h_1, ..., h_r \in H$ die Bilder der „Einheitsvektoren“ $(\bar{1}, \bar{0}, ...)$, $(\bar{0}, \bar{1}, ...)$ usw. in H. Wegen $pG = H$ existiert jeweils ein $g_j \in G$ mit $pg_j = h_j$.
- Zeige mit Hilfe von Lemma 5.6 (i), dass $U = \langle g_1, ..., g_r \rangle$ isomorph zur Gruppe
$$\mathbb{Z}/p^{n_1+1}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p^{n_r+1}\mathbb{Z} \quad \text{ist.}$$
- Nach Lemma 5.6 (ii) ist $G[p]$ ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum, und $G[p] \cap U$ ist ein Untervektorraum. Wähle eine Basis $\{v_1, ..., v_s\}$ von $G[p] \cap U$ und erweitere diese durch $v_{s+1}, ..., v_t$ zu einer Basis von $G[p]$.
- Setze $V = \langle v_{s+1}, ..., v_t \rangle$. Überprüfe nun, dass $G = U \oplus V$ gilt. Daraus folgt dann
$$G \cong U \times V \cong \mathbb{Z}/p^{n_1+1}\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/p^{n_r+1}\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{t-s}.$$

Beweis von Satz 5.9 (Forts.)

- Die Gleichung $U \cap V = \{0_G\}$ folgt aus der Basiseigenschaft von $\{v_1, ..., v_s\}$, wobei zu beachten ist, dass $V \subseteq G[p]$ gilt.
- Zum Nachweis von $U + V = G$ sei $g \in G$ vorgegeben. Stelle pg durch die Erzeuger h_j von pG dar. Definiere damit ein $g' \in U$ mit $pg' = g$, und setze $g'' = g - g'$. Überprüfe, dass $g'' \in G[p]$ liegt. Mit der Basis von $G[p]$ kann gezeigt werden, dass g'' in $U + V$ enthalten ist.

Beweis von Satz 5.9 (Forts.)

- genauere Ausführung des letzten Punkts:

  Das Element pg hat die Form $\sum_{j=1}^{r} a_j h_j$ mit $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$. Setzen wir $g' = \sum_{j=1}^{r} a_j g_j$, dann folgt aus $pg_j = h_j$ für $1 \leq j \leq r$ die Gleichung $pg' = g$. Für das Element g'' folgt damit

$$pg'' = pg - pg' = \left(\sum_{j=1}^{r} a_j h_j\right) - p\left(\sum_{j=1}^{r} a_j g_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{r} a_j h_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{r} a_j p g_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{r} a_j h_j\right) - \left(\sum_{j=1}^{r} a_j h_j\right) = 0_G .$$

  Also liegt g'' in $G[p]$.

Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppe

Satz (5.10)

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann gibt es $r, s \in \mathbb{N}_0$ und $d_1, ..., d_s \in \mathbb{N}$ mit

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}/d_s\mathbb{Z}.$$

Dabei können die Zahlen d_i so gewählt werden, dass sie entweder

(i) alle Primzahlpotenzen sind oder

(ii) $d_i \mid d_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ erfüllt ist.

Im Fall (ii) gezeichnet man die Zahlen d_i als Elementarteiler der abelschen Gruppe.