Überblick § 4: Homomorphismen und Faktorgruppen

- Definition der Gruppenhomomorphismen
- Struktur der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(G)$ für eine zyklische Gruppe G
- Definition der Normalteiler ($N \trianglelefteq G$)
- Komplexprodukte von Untergruppen ($NU = \{nu \mid n \in N\ ,\ u \in U\}$), innere direkte Produkte
- Definition der Faktorgruppe G/N ($N \trianglelefteq G$)
- Homomorphiesatz $G/N \cong H$, falls $\phi : G \to H$ Epimorphismus und $N = \ker(\phi)$, Isomorphiesätze als Folgerung
- Korrespondenzsatz (Untergruppenstruktur von G/N vs. Untergruppenstruktur von G)

Eine Verknüpfung auf den Linksnebenklassen

Proposition (4.26)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler von G. Dann gibt es auf der Menge G/N eine eindeutig bestimmte Verknüpfung $\cdot$ mit der Eigenschaft

$$(gN) \cdot (hN) \quad = \quad (gh)N \qquad \text{für alle} \quad g, h \in G.$$

Satz (4.27)

Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler. Dann ist die Menge G/N der Linksnebenklassen mit der Verknüpfung $gN \cdot hN = (gh)N$ eine Gruppe, die sogenannte Faktorgruppe von G modulo N. Die Abbildung $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein Epimorphismus von Gruppen, der sog. kanonische Epimorphismus.

wichtiges Beispiel: die Faktorgruppen $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

Der induzierte Homomorphismus

Proposition (4.28)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler mit $N \subseteq \ker(\phi)$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus $\bar{\phi} : G/N \to H$ mit

$$\bar{\phi}(gN) \quad = \quad \phi(g) \qquad \text{für alle } g \in G.$$

Man nennt $\bar{\phi}$ den durch ϕ induzierten Homomorphismus.

Der Homomorphiesatz für Gruppen

Satz (4.29)

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann induziert ϕ einen Isomorphismus

$$\bar{\phi} : G/\ker(\phi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(\phi).$$

Ist der Homomorphismus ϕ surjektiv, dann erhält man also einen Isomorphismus $G/\ker(\phi) \cong H$.

weitere Anwendungen des Homomorphiesatzes

(ii) Ist G eine beliebige Gruppe, dann gilt $G/\{e\} \cong G$.

Für den Nachweis wende den Homomorphiesatz an auf $\phi = id_G$. klar: ϕ ist surjektiv, und es gilt $\ker(\phi) = \{e\}$, denn für alle $g \in G$ ist

$$g \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(g) = e \underset{\phi = id_G}{\Leftrightarrow} g = e.$$

(iii) G bel. Gruppe $\Rightarrow G/G \cong \{e\}$

Betrachte die Abb. $\phi : G \to \{e\},\ g \mapsto e$.

Dies ist ein Hom., da $\forall g, h \in G$: $\phi(gh) = e =$

$e\,e = \phi(g)\cdot\phi(h)$. Offenbar ist ϕ surjektiv

Für alle $g \in G$ gilt $\phi(g) = e$ und somit $g \in \ker(\phi)$

$\Rightarrow \ker(\phi) = G$. Also liefert der Hom.satz den angegebenen Isomorphismus.

(iv) Ist K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $GL_n(K)/SL_n(K) \cong K^\times$

Für alle $A \in GL_n(K)$ gilt $\det(A) \neq 0_K$, somit ist durch $A \mapsto \det(A)$ ein Hom. $\phi: GL_n(K) \to K^\times$ definiert.

Um den Hom.-satz anwenden zu können, muss überprüft werden:

(1) ϕ ist Hom. (2) ϕ ist surjektiv. (3) $\ker(\phi) = SL_n(K)$

zu (1) Seien $A, B \in GL_n(K)$ $\Rightarrow$ $\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$ [Multiplikationssatz (Lin Alg)]

$= \phi(A)\phi(B)$

zu (2) Sei $a \in K^\times$. Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a \cdot 1_K \cdots 1_K = a \neq 0$

$\Rightarrow A \in GL_n(K)$ und $\phi(A) = \det(A) = a$

<u>zu (3)</u> Sei $A \in GL_n(K)$. Dann gilt die Äquiv. $A \in \ker(\phi) \Leftrightarrow \phi(A) = 1_K \Leftrightarrow$

1_K Neutralelt. von $K^\times$

$\det(A) = 1_K \Leftrightarrow A \in SL_n(K)$ $\square$

Korespondenzsatz (Vorb.)

Proposition (4.30)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und $\pi_N : G \to G/N$ der kanonische Epimorphismus.

(i) Ist U eine Untergruppe von G, dann gilt $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$.

(ii) Ist $\bar{U}$ eine Untergrupe von G/N, dann gilt $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$.

Beweis von Prop. 4.30

geg.: Gruppe G, $N \trianglelefteq G$, $\pi_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$

$U \leq G$ und $\bar{U} \leq \bar{G}$, wobei $\bar{G} := G/N$

zu überprüfen (i) $\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = UN$

(ii) $\pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$

zu (i) „$\supseteq$“ Sei $g \in UN \Rightarrow \exists u \in U, n \in N : g = un$

z.zg. $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$, gleichbed.: $\pi_N(g) \in \pi_N(U)$

Es gilt $\pi_N(g) = gN = (un)N = uN = \pi_N(u)$

wegen $un \in uN$

$\Rightarrow \pi_N(g) \in \pi_N(U)$

„$\subseteq$“ Sei $g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U))$, z.zg. $g \in UN$

$g \in \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \Rightarrow \pi_N(g) \in \pi_N(U) \Rightarrow \exists u \in U$ mit
$\pi_N(g) = \pi_N(u) \Rightarrow gN = uN \Rightarrow g \in uN \Rightarrow$
$\exists n \in N$ mit $g = un \Rightarrow g \in UN$

zu (ii) „$\subseteq$" folgt direkt aus der Mengenlehre ($f: A \to B$ Abb, $U \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(U)) \subseteq U$)

„$\supseteq$" Sei $\bar{g} \in \bar{U}$. $\bar{g} \in \bar{G} \Rightarrow \exists g \in G$ mit $\bar{g} = gN$
$\pi_N(g) = \bar{g} \in \bar{U} \Rightarrow g \in \pi_N^{-1}(\bar{U}) \Rightarrow \bar{g} = \pi_N(g) \in \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U}))$

$\square$

Der Korrespondenzsatz für Gruppen

Satz (4.31)

Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler, $\bar{G} = G/N$ und $\pi_N : G \to \bar{G}$ der kanonische Epimorphismus. Ferner sei $\bar{\mathcal{G}}$ die Menge der Untergruppen von $\bar{G}$ und $\mathcal{G}_N$ die Menge der Untergruppen U von G mit $U \supseteq N$. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}},\ U \mapsto \pi_N(U) \ \text{ und } \ \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N,\ \bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$$

bijektiv und zueinander invers. Außerdem gilt:

(i) Für $U, V \in \mathcal{G}_N$ gilt $U \subseteq V$ genau dann, wenn $\pi_N(U) \subseteq \pi_N(V)$ erfüllt ist.

(ii) Genau dann ist $U \in \mathcal{G}_N$ ein Normalteiler von G, wenn $\pi_N(U)$ ein Normalteiler von $\bar{G}$ ist.

(iii) Ist $U \in \mathcal{G}_N$ von endlichem Index in G und $\bar{U} = \pi_N(U)$, dann gilt $(G : U) = (\bar{G} : \bar{U})$.

Beweis von Satz 4.31

geg: Gruppe G, $N \trianglelefteq G$, $\bar{G} = G/N$,

$\pi_N : G \to \bar{G}$ kan. Epimorphismus

$\mathcal{G}_N$ = Menge der Untergr. $U \leq G$
mit $U \supseteq N$

$\bar{\mathcal{G}}$ = Menge der Untergr. von $\bar{G}$

Um zu überprüfen, dass die Zuordnungen

$\phi : \mathcal{G}_N \to \bar{\mathcal{G}}$, $U \mapsto \pi_N(U)$ und

$\psi : \bar{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}_N$, $\bar{U} \mapsto \pi_N^{-1}(\bar{U})$ zueinander

invers sind, muss gezeigt werden

(1) $\forall\, U \in \mathcal{G}_N : \pi_N^{-1}(\pi_N(U)) = U$

(2) $\forall\, \bar{U} \in \bar{\mathcal{G}} : \pi_N(\pi_N^{-1}(\bar{U})) = \bar{U}$

Aussage (2) ist identisch mit Prop. 4.30 (ii)

<u>zu (1)</u> Sei $U \in \mathcal{G}_N \Rightarrow U \supseteq N,\ U \leq G$

$$\pi_N^{-1}(\pi_N(U)) \underset{\text{Prop. 4.30 (i)}}{=} UN \underset{\text{da } N \trianglelefteq G}{=} NU \underset{U \supseteq N}{=} U$$

Be

zu

Bel

Ans

auf

zu übe

zu (1).

beiden

und som

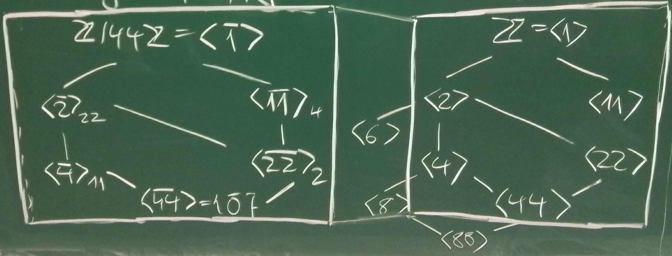
Anwendungsbeispiel für den Korrespondenzsatz

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $N = \langle 44 \rangle \Rightarrow G/N = \mathbb{Z}/44\mathbb{Z}$

bekannt: $\mathbb{Z}/44\mathbb{Z}$ ist zyklisch, $\mathbb{Z}/44\mathbb{Z} = \langle \bar{1} \rangle$

$\overset{\S 3}{\Rightarrow}$ Für jeden Teiler d von 44 gibt es genau eine Untergruppe der Ordnung d.

Unterg. von G/N | Unterg. von G



Die Isomorphiesätze

Satz (4.32)

Sei G eine Gruppe, $N \trianglelefteq G$ und U eine Untergruppe von G.

(i) Dann ist $N \cap U$ ein Normalteiler von U, und es gilt $U/(N \cap U) \cong (UN)/N$.

(ii) Ist auch $U \trianglelefteq G$ und gilt $U \supseteq N$, dann folgt $G/U \cong (G/N)/(U/N)$.

G
U
$U \supseteq N$

Beweis von Satz 4.32

zu (ii) geg.: Gruppe G, $N \trianglelefteq G$, $U \trianglelefteq G$ mit $U \supseteq N$

Beh.: $G/U \cong \bar{G}/\bar{U}$, wobei $\bar{U} = \pi_N(U)$

Ansatz: Wende den Homomorphiesatz an auf die Abb. $\phi : G \to \bar{G}/\bar{U}$, $g \mapsto \pi_N(g)\bar{U}$

zu überprüfen: (1) ϕ ist Hom. (2) ϕ ist surj.
(3) $\ker(\phi) = U$

zu (1), (2) Offenbar ist ϕ die Komposition der beiden surjektiven Hom. π_N und $\pi_{\bar{U}} : \bar{G} \to \bar{G}/\bar{U}$ und somit selbst ein surj. Hom.

zu (3) Sei $g \in G$. Dann gilt die Äquivalenz

$$g \in \ker(\phi) \iff \phi(g) = e_{\bar{G}/\bar{U}} \iff \pi_N(g)\,\bar{U} = \bar{U}$$

$$\iff \pi_N(g) \in \bar{U} \iff \exists\, u \in U \text{ mit } \pi_N(g) = \pi_N(u)$$

$$\iff \exists\, u \in U : gN = uN \iff \exists\, u \in U,\ n \in N : g = un$$

$$\iff g \in UN \underset{U \supseteq N}{\iff} g \in U$$

zu (i) G Gruppe, $N \trianglelefteq G$, $\bar{G} = G/N$, $U \leq G$

z. zg.: $U/_{N \cap U} \cong UN/_N$

Wg. $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$ ist $UN \leq G$.

Wg. $U \leq G$ und $N \trianglelefteq G$ ist $UN \leq G$.

Ansatz: Wende den Hom-satz an auf

$$\phi : U \to UN/N, \quad u \mapsto uN$$

überprüfe: (1) ϕ ist Hom. (2) ϕ ist surj. (3) $\ker(\phi) = U \cap N$

$\square$

(siehe Skript)

Anwendungsbeispiel zu Satz 4.32 (ii)

$G = (\mathbb{Z}, +)$, $N = \langle 6 \rangle \Rightarrow \bar{G} = G/N = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$U = \langle 3 \rangle \supseteq \langle 6 \rangle$ Ergebnis des Satzes in diesem Fall: Sei $\bar{U} = \langle \bar{3} \rangle = \pi_N(U)$

Dann gilt: $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) / \langle \bar{3} \rangle = \bar{G}/\bar{U} \cong G/U \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

gen

ander