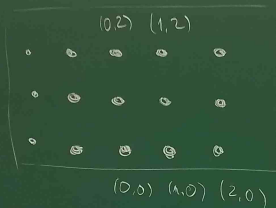


Die Symmetriegruppen der platonischen Körper

Definition (1.9)

Bezeichnet $\mathbb{T}$ einen beliebigen Tetraeder, dann nennt man $\text{Sym}(\mathbb{T})$ eine **Tetraedergruppe** und $\text{Sym}^+(\mathbb{T})$ eine **eigentliche Tetraedergruppe**. Ist $\mathbb{O}$ ein Oktaeder, dann wird $\text{Sym}(\mathbb{O})$ eine **Oktaedergruppe** und $\text{Sym}^+(\mathbb{O})$ eine **eigentliche Oktaedergruppe**. Entsprechend werden (eigentliche) Würfelgruppen, Dodekaedergruppen und Ikosaedergruppen definiert.

Das Gitter $\mathbb{Z}^2$



(Es gibt noch weitere
Elemente der Symmetriegruppe.)

$\mathbb{R}^2$

Elemente von $\text{Sym}(\mathbb{Z}^2)$

- ganzzahlige Trans-
lationen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \end{pmatrix}$
mit $m, n \in \mathbb{Z}$
- Drehungen um ein $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$
mit Winkel $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$
- Spiegelung am Punkt
 $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$
- Spiegelung an
 $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{2}m \}, m \in \mathbb{Z}$

$\in G \times H$ vorgegeben, $z \in \mathbb{Z}g$.

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1, h_1) * (g_2, h_2) * (g_3, h_3)$$

Definition (1.10)

Seien G und H Gruppen. Dann bildet das kartesische Produkt $G \times H$ mit der Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

für alle $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ ebenfalls eine Gruppe. Man nennt sie das **(äußere) direkte Produkt** von G und H . Sind G und H abelsch, dann gilt dasselbe für $(G \times H, *)$.

geg. Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, \circ)$

Nachweis der Gruppeneigenschaft $(G \times H, *)$

(mit $*$ geg. durch $(g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \circ h_2)$)

- Die Menge $G \times H$ ist $\neq \emptyset$, da z.B. (e_G, e_H) in $G \times H$ liegt.

- klar: $*$ ist eine Abb. $(G \times H) \times (G \times H) \rightarrow G \times H$, also eine Verknüpfung auf $G \times H$

- Assoziativität: Seien $(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3) \in G \times H$ vorgegeben, z.z. g.:

$$((g_1, h_1) * (g_2, h_2)) * (g_3, h_3) = (g_1, h_1) * ((g_2, h_2) * (g_3, h_3))$$

$$((g_1, h_1) * (g_2, h_2)) * (g_3, h_3) = \swarrow \text{Def. von } *$$

$$(g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2) * (g_3, h_3) = \swarrow \text{Def. von } *$$

$$((g_1 \circ g_2) \circ g_3, (h_1 \circ h_2) \circ h_3) = \swarrow \text{Assoziativität von } \circ$$

$$(g_1 \circ (g_2 \circ g_3), h_1 \circ (h_2 \circ h_3)) =$$

$$(g_1, h_1) * (g_2 \circ g_3, h_2 \circ h_3) =$$

$$(g_1 * h_1) * ((g_2, h_2) * (g_3, h_3))$$

• Das Element (e_G, e_H) ist Neutralelement in $(G \times H, *)$, denn für alle $(g, h) \in G \times H$

$$\text{gilt: } (g, h) * (e_G, e_H) = (g \circ e_G, h \circ e_H) \\ \stackrel{(*)}{=} (g, h) \quad \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{da } e_G \text{ Neutralement in } (G, \circ) \\ \text{und } e_H \text{ Neutralement in } (H, \circ) \end{array}$$

und ebenso $(e_G, e_H) * (g, h) = (e_G \cdot g, e_H \cdot h)$
 $= (g, h) \quad (\Rightarrow e_{G \times H} = (e_G, e_H))$

• Für jedes $(g, h) \in G \times H$ ist (g^{-1}, h^{-1}) ein inverses Element, denn es gilt

$$(g, h) * (g^{-1}, h^{-1}) = (g \cdot g^{-1}, h \cdot h^{-1}) = (e_G, e_H) = e_{G \times H} \text{ und } (g^{-1}, h^{-1}) * (g, h) = (g^{-1} \cdot g, h^{-1} \cdot h) = (e_G, e_H) = e_{G \times H}$$

(Es gilt also $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$ in der Gruppe $(G \times H, *)$.)

F
h
(1)
Sch
+
Sch
(2)
b
k
Neut

Setze nun voraus, dass $(G, \circ)$ und $(H, \circ)$
beides abelsche Gruppen sind.

zeige: Dann ist auch $(G \times H, *)$ abelsch.

Seien $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}(g_1, h_1) * (g_2, h_2) &= (g_1 \circ g_2, h_1 \circ h_2) \\ &= (g_2 \circ g_1, h_2 \circ h_1) = (g_2, h_2) * (g_1, h_1)\end{aligned}$$

↑ $(G, \circ)$ und
 $(H, \circ)$ sind abelsch

□

c) Für Gruppen gibt es zwei unterschiedliche Schreibweisen:

(1) multiplikative Schreibweise
(bei Verknüpfungssymbolen $\cdot$, $\circ$, $*$)

Schreibweise für das Neutralelement:

e_G , 1_G oder e , 1

Schreibweise für das Inverse von a : a^{-1}

(2) additive Schreibweise (nur üblich bei abelschen Gruppen)
Verknüpfungssymbol: $+$, $\oplus$

Neutralelement: 0_G , 0 Inverse: $-a$

Definition (1.11)

- (i) Eine **Halbgruppe** ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer assoziativen Verknüpfung $*$ auf G .
- (ii) Ein Element $e \in G$ der Halbgruppe wird als **Neutralelement** bezeichnet, wenn $e * a = a$ und $a * e = a$ für alle $a \in G$ erfüllt ist.
- (iii) Eine Halbgruppe mit mindestens einem Neutralelement bezeichnet man als **Monoid**.

Jede Halbgruppe besitzt höchstens ein Neutralelement.

$$h^{-1} * e_G * h = h^{-1} * h = e_G$$

Bem. In jeder Halbgruppe $(H, *)$ gibt es höchstens ein Neutralelement, denn:

Ang., $e, e' \in H$ sind beides Neutralelemente.

Dann gilt: $e = e * e' \stackrel{\downarrow \text{da } e \text{ Neutralelement}}{=} e'$

$\hookrightarrow e'$ ist Neutralelt.

Definition (1.12)

Sei $(G, *)$ ein Monoid mit dem Neutralelement e_G . Ein Element $g \in G$ wird **invertierbar** in $(G, *)$ genannt, wenn ein $h \in G$ mit $g * h = h * g = e_G$ existiert. Man nennt h in diesem Fall ein **Inverses** von g .

Proposition (1.13)

Sei $(G, *)$ ein Monoid.

- (i) Jedes Element $g \in G$ besitzt höchstens ein Inverses; sofern es existiert, wird es mit g^{-1} bezeichnet.
- (ii) Seien $g, h \in G$ invertierbare Elemente. Dann sind auch die Elemente $g * h$ und g^{-1} invertierbar, und es gilt $(g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$ und $(g^{-1})^{-1} = g$.
- (iii) Das Neutralelement e_G ist invertierbar, und es gilt $e_G^{-1} = e_G$.

Beweis von Prop. 1.13: geg. Monoid $(G, *)$

zul i) Sei $g \in G$ invertierbar. Ang. $h, h' \in G$ sind beides Inverse von g . Dann gilt $g * h = e_G$ und $h' * g = e_G$.

$$\text{Daraus folgt } h = e_G * h = (h' * g) * h = h' * (g * h) \\ = h' * e_G = h'$$

zul ii) Seien $g, h \in G$ invertierbar, zeige:

(1) $h^{-1} * g^{-1}$ ist Inverses von $g * h$. ($\Rightarrow (g * h)^{-1} = h^{-1} * g^{-1}$)

(2) g ist Inverses von g^{-1} ($\Rightarrow (g^{-1})^{-1} = g$)

zu (1) $(g * h) * (h^{-1} * g^{-1}) = g * (h * h^{-1}) * g^{-1} = g * e_G * g^{-1} =$
 $g * g^{-1} = e_G, (h^{-1} * g^{-1}) * (g * h) = h^{-1} * (g^{-1} * g) * h =$
 $h^{-1} * e_G * h = h^{-1} * h = e_G$

zu (2) Dies folgt direkt aus den Gleichungen $g^{-1} * g = e_G$, $g * g^{-1} = e_G$.

zu (iii) Dies folgt direkt aus $e_G * e_G = e_G$. $\square$

we
*
=
7
0

Unter einer Verknüpfung abgeschlossene Mengen

Definition (1.14)

Sei $(X, \circ)$ eine Menge mit einer Verknüpfung. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ wird **abgeschlossen** unter $\circ$ genannt, wenn für alle $x, y \in U$ auch das Element $x \circ y$ in U liegt.

Bem. zur Abgeschlossenheit:

Sei $(X, \circ)$ eine Menge mit einer Verknüpfung und $U \subseteq X$.

Einschränkung von $\circ: X \times X \rightarrow X$ auf $U \times U$ liefert eine Abb. $U \times U \rightarrow X$.

Ist U abgeschlossen unter $\circ$, dann ist dies eine Abbildung $U \times U \rightarrow U$, mit anderen Worten, eine Verknüpfung $\circ_U$ auf der Menge U .

Satz (1.15)

Sei $(G, *)$ ein Monoid und $G^\times \subseteq G$ die Teilmenge der invertierbaren Elemente. Dann ist $G^\times$ abgeschlossen unter der Verknüpfung $*$, und $(G^\times, *_{G^\times})$ ist eine Gruppe. Das Neutralelement e_G von G ist zugleich das Neutralelement von $(G^\times, *_{G^\times})$.

Beispiele für zweielementige Gruppen

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$(\{\pm 1\}, \cdot)$

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

weitere Beispiele:

$*$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, *)$

Neutralelt. 1

	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$

Der Isomorphiebegriff

Definition (1.16)

Man bezeichnet zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ als **isomorph** und schreibt $G \cong H$, wenn eine bijektive Abbildung $\phi : G \rightarrow H$ existiert, so dass

$$\phi(g \cdot g') = \phi(g) * \phi(g')$$

für alle $g, g' \in G$ erfüllt ist.

Beispiele für Isomorphismen (Beweise folgen)

- (i) Es gilt $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
- (ii) Jede Diedergruppe D_n (mit $n \geq 3$) ist isomorph zu einer $2n$ -elementigen Untergruppe von S_n .
- (iii) Für die Symmetriegruppen des Tetraeders gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{T}) \cong A_4$ und $\text{Sym}(\mathbb{T}) \cong S_4$.
- (iv) Es gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{O}) \cong \text{Sym}^+(\mathbb{W}) \cong S_4$ und $\text{Sym}(\mathbb{O}) \cong \text{Sym}(\mathbb{W}) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ für die Symmetriegruppen von Würfel und Oktaeder.
- (v) Für die Symmetriegruppen von Dodekaeder und Ikosaeder gilt $\text{Sym}^+(\mathbb{D}) \cong \text{Sym}^+(\mathbb{I}) \cong A_5$ und $\text{Sym}(\mathbb{D}) \cong \text{Sym}(\mathbb{I}) \cong A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Definition (1.17)

Das **Klassifikationsproblem für endliche Gruppen** kann folgendermaßen formuliert werden: Gegeben ein $n \in \mathbb{N}$, bestimme alle Gruppen mit n Elementen bis auf Isomorphie.

Damit ist gemeint: Bestimme eine Zahl $r(n)$ und Gruppen $G_1, G_2, \dots, G_{r(n)}$ mit der Eigenschaft, dass *jede* Gruppe G mit $|G| = n$ zu **genau einer** dieser Gruppen isomorph ist.

Im weiteren Verlauf der Vorlesung werden wir zeigen

- Ist p eine Primzahl, dann ist jede Gruppe G mit $|G| = p$ isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p) = 1$.
- Für jede Primzahl p gilt: Jede Gruppe G mit $|G| = p^2$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ oder isomorph zu $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Es gilt also $r(p^2) = 2$.
- Für jede ungerade Primzahl p gilt außerdem: Jede Gruppe der Ordnung $2p$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ oder zur Diedergruppe D_p . Es gilt also auch $r(2p) = 2$.

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
1	1	$\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$
2	1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
3	1	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
4	2	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
5	1	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
6	2	$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, S_3$
7	1	$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$
8	5	$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3, D_4, Q_8$

Gruppen der Ordnung ≤ 15 bis auf Isomorphie (Forts.)

n	$r(n)$	Gruppen bis auf Isomorphie
9	2	$\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
10	2	$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, D_5$
11	1	$\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
12	5	$\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, D_6, A_4, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
13	1	$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
14	2	$\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}, D_7$
15	1	$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$