- Die Signumsfunktion ist eine Abbildung $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$, die die Gleichung $\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ für alle $\sigma, \tau \in S_n$ erfüllt. Ist σ ein k-Zykel, dann gilt $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$.
- Die Teilmenge $A_n \subseteq S_n$ gegeben durch $A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = +1\}$ wird als alternierende Gruppe bezeichet.

Satz (1.4)

Die Gruppe S_n ist für $n \leq 2$ abelsch und für $n \geq 3$ nicht abelsch.

Di 10-12 B046

Do 14-16 B046

Um zu zeigen, dass $(A_n, \circ)$ eine Gruppe ist, müssen wir u. a. überprüfen:

$\sigma \in A_n$

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = +1$

$$\forall \sigma \in A_n : \sigma^{-1} \in A_n$$

Sei $\sigma \in A_n$. $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (+1) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) =$

$\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(id) = +1$

zeige: S_1 und S_2 sind abelsch

Verknüpfungstab. von S_1

$\circ$	id
id	id

von S_2

$\circ$	id	$(1\,2)$
id	id	$(1\,2)$
$(1\,2)$	$(1\,2)$	id

$$(12)\circ(12) = \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} = id$$

Beide Tabellen sind symmetrisch bzgl der Diagonalen von links oben nach rechts unten. $\Rightarrow$ Die Gruppen sind abelsch.

zeige: S_n ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

Betrachte die Elemente $(12), (13) \in S_n$.

$(12)\circ(13) = (1\,3\,2)$, $(13)\circ(12) = (1\,2\,3)$

$(12)\circ(13) \neq (13)\circ(12) \Rightarrow S_n$ ist nicht abelsch

weitere nicht-kommutative Gruppen: Lineare Gruppen

(1) Ist $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper, dann ist das Paar $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ bestehend aus der Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K mit der Multiplikation $\cdot$ von Matrizen als Verknüpfung die sog. allgemeine lineare Gruppe über dem Körper K.

(2) Die Teilmenge $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det(A) = 1\}$ bildet mit der Multiplikation von Matrizen die spezielle lineare Gruppe.

(3) Die orthogonale Gruppe $\mathcal{O}(n)$ besteht aus den Matrizen A mit der Eigenschaft ${}^{\mathrm{t}}A \cdot A = E_n$. Die Menge

$$\mathrm{SO}(n) = \mathcal{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

bildet die spezielle orthogonale Gruppe.

(4) Über dem Körper $K = \mathbb{C}$ gibt es entsprechend die unitäre Gruppe $\mathcal{U}(n) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid {}^{\mathrm{t}}\bar{A} \cdot A = E_n\}$ und die spezielle unitäre Gruppe $\mathrm{SU}(n) = \mathcal{U}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Lineare Gruppen als endliche nicht-abelsche Gruppen

- Wir werden später sehen: Für jede Primzahlpotenz q gibt es einen (im Wesentlichen eindeutig bestimmten) Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Ist q keine Primzahl, dann ist dies allerdings nicht der Restklassenring $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$.
- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und mit $n \geq 2$ und jede Primzahlpotenz q sind $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ endliche nicht-abelsche Gruppen.
- Es gilt

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=1}^{n}(q^k - 1) \quad \text{und} \quad \mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q) = q^{\frac{1}{2}n(n-1)} \prod_{k=2}^{n}(q^k - 1).$$

Bestimmung von $|GL_n(\mathbb{F}_q)|$

($n \in \mathbb{N}$, q Primzahlpotenz)

- bekannt aus der Linearen Algebra:
  (i) $A \in M_{n, \mathbb{F}_q}$ ist genau dann invertierbar, wenn die Spaltenvektoren eine Basis des $\mathbb{F}_q^n$ bilden
  (ii) Basisergänzungssatz: Jedes linear unabh. System in einem endl.-dim. $\mathbb{F}_q$-Vektorraum kann zu einer Basis ergänzt werden

=

-

v_1

$\langle v_1$

$\Rightarrow$

für

$\Rightarrow$ Jede Basis kommt dadurch zu Stande, dass man das „leere" Tupel durch Hinzunahme von Vektoren zu einem immer größeren lin. unabh. System erweitert.

- Vorgehensweise: Überlege, wieviele Möglichkeiten es gibt, den ersten, zweiten, dritten... Spaltenvektor zu wählen, ohne die lineare Unabhängigkeit zu zerstören.
- Anzahl Mögl. für die erste Spalte: muss aus $\mathbb{F}_q^n \setminus \{0_{\mathbb{F}_q^n}\}$ stammen $\Rightarrow$ $q^n - 1$ Möglichkeiten

- h
- $|($
- q^1

Bsp.:

-ries-

eine

linear

-um.

Basis

- Anzahl Mögl. für die zweite Spalte, wenn die erste schon gewählt wurde. muss aus $\mathbb{F}_q^n \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{F}_q}$ stammen, falls v_1 erste Spalte $\Rightarrow$ Anzahl Mögl. $|\mathbb{F}_q^n| - |\langle v_1 \rangle_{\mathbb{F}_q}|$ $= q^n - q$
- Anzahl Mögl. für die $(k+1)$-te Spalte, wenn k Spalten $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}_q^n$ schon gewählt. v_{k+1} muss in $\mathbb{F}_q^n \setminus \langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{F}_q}$ liegen. $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{F}_q}$ ist k-dim. Untervektorraum von $\mathbb{F}_q^n$ $\Rightarrow |\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{F}_q}| = q^k \Rightarrow q^n - q^k$ Möglichkeiten für v_{k+1}

- Für die Wahl aller n Spaltenvektoren haben wir also

$$|GL_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k) =$$

$$q^{1+2+\ldots+(n-1)} \prod_{k=0}^{n-1} \left(q^{n-k} - 1\right) = q^{\frac{1}{2}(n-1)n} \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1)$$

<u>Bsp.</u>: $|GL_3(\mathbb{F}_3)| = 3^3 \cdot (3-1) \cdot (9-1) \cdot (27-1)$

$= 3^3 \cdot 16 \cdot 26$

Die Bewegungsgruppen

Erinnerung:

- Eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $\|\phi(v) - \phi(w)\| = \|v - w\|$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$.
- Ist ϕ eine Bewegung, dann gibt es eindeutig bestimmte $u \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathcal{O}(n)$, so dass $\phi(v) = u + Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.
- Ist $\det(A) = +1$, dann spricht man von einer orientierungserhaltenden, im Fall $\det(A) = -1$ von einer orientierungsumkehrenden Bewegung.

Definition (1.5)

Die Menge der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnen. Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden ebenso eine Gruppe; diese bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_n^+$.

Die Symmetriegruppe einer Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$

Definition (1.5)

Die Menge der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{B}_n$ bezeichnen. Die orientierungserhaltenden Bewegungen bilden ebenso eine Gruppe; diese bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_n^+$.

Definition (1.6)

Ist $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, dann bezeichnet man

$$\mathrm{Sym}(T) \quad = \quad \{\phi \in \mathcal{B}_n \mid \phi(T) = T\}$$

als Symmetriegruppe von T. Die Elemente von $\mathrm{Sym}^+(T) = \mathrm{Sym}(T) \cap \mathcal{B}_n^+$ bezeichnet man als orientierungserhaltende Symmetrien der Menge T.

Nachweis der Gruppeneigenschaft von B_n:

- B_n ist nichtleer, denn: $id_{\mathbb{R}^n}$ hat die Darstellung $v \mapsto 0_{\mathbb{R}^n} + E_n v$, und $E_n \in O(n) \Rightarrow id_{\mathbb{R}^n} \in B_n$
- Verknüpfung: Bezeichne die Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto u + Av$ mit $\phi_{u,A}$, falls $u \in \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$.
  ($\Rightarrow id_{\mathbb{R}^n} = \phi_{0_{\mathbb{R}^n}, E_n}$)

  Beobachtung: Sind $\phi, \psi \in B_n$, dann auch $\phi \circ \psi$, denn: $\phi, \psi \in B_n \Rightarrow \exists\, u, w \in \mathbb{R}^n$, $A, B \in O(n)$ mit $\phi = \phi_{u,A}$, $\psi = \phi_{w,B}$. Für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^n$

gilt $(\phi \circ \psi)(v) = \phi_{u,A}(\phi_{w,B}(v)) = \phi_{u,A}(w + Bv)$

$= u + A(w + Bv) = \underbrace{(u + Aw)}_{=: u'} + \underbrace{(AB)}_{=: C} v = \phi_{u',C}(v)$

$\Rightarrow \phi_{u,A} \circ \phi_{w,B} = \phi_{u',C}$ (wobei $C \in O(n)$, da $A, B \in O(n)$)

($\Rightarrow$ Beob.) Die Einschränkung der Komposition $\circ$ auf B_n liefert eine Verknüpfung auf B_n

- Die Verknüpfung ist assoziativ, da sich die Komposition bei Abbildungen assoziativ verhält
- Die Identität ist ein Neutralelement in B_n, da $\phi \circ id_{\mathbb{R}^n} = \phi$, $id_{\mathbb{R}^n} \circ \phi = \phi$ $\forall \phi \in B_n$

- Inverse: Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$ gilt die Äquivalenz

$$w = u + Av \iff w - u = Av \iff A^{-1}(w-u) = v \iff A^{-1}(-u) + A^{-1}w = v$$

Rechnung zeigt: Die Umkehrabb. von $\phi_{u,A}$ ist $\phi_{A^{-1}(-u), A^{-1}}$. $A \in O(n) \Rightarrow A^{-1} \in O(n)$

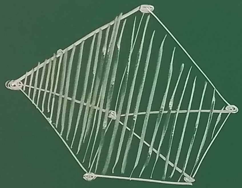
$\Rightarrow \phi_{u,A}^{-1} \in B_n$, d.h. die Umkehrabb. jeder Bewegung ist wiederum eine Bewegung

Wegen $\phi \circ \phi^{-1} = id_{\mathbb{R}^n}$ und $\phi^{-1} \circ \phi = id_{\mathbb{R}^n}$ ist für jedes $\phi \in B_n$ die Abb. ϕ^{-1} jeweils das Inverse von ϕ in B_n. $\square$

Die konvexe Hülle einer Punktmenge

- Die kleinste konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, die eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ enthält, wird die konvexe Hülle von X genannt und mit $\mathrm{conv}(X)$ bezeichnet.
- Die konvexe Hülle einer endlichen Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man als Polytop.
- Ist X nicht in einem echten affinen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ enthalten, spricht man von einem nicht ausgearteten Polytop.

Beispiel für die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge



Die Diedergruppen

Definition (1.7)

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, und für $0 \leq k < n$ sei der Punkt $P_{n,k} \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$P_{n,k} = \left(\cos(\tfrac{2\pi k}{n}), \sin(\tfrac{2\pi k}{n})\right) .$$

Dann bezeichnen wir die konvexe Hülle der endlichen Punktmenge

$$\{P_{n,k} \mid 0 \leq k < n\}$$

als das regelmäßiges Standard-n-Eck Δ_n. Die Symmetriegruppe $D_n = \mathrm{Sym}(\Delta_n)$ wird die n-te Diedergruppe genannt.

Bem.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ erhält man die Elemente von D_n auf folgende Weise:

ρ_n = Drehung um $\frac{2\pi}{n}$, geg. durch $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix}$

τ = Spiegelung an der x-Achse, geg. durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Dann ist $D_n = \underbrace{\{\rho_n^k \mid 0 \leq k < n\}}_{\text{Drehungen}} \cup \underbrace{\{\rho_n^k \circ \tau \mid 0 \leq k < n\}}_{\text{Spiegelungen}}$

A

n)

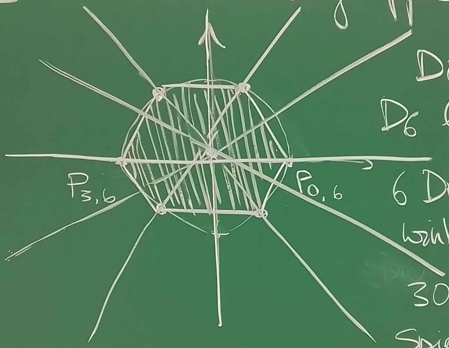
jeder

g

$\mathbb{R}^n$

jeweils

Beispiel: die Diedergruppe D_6



Die Diedergruppe D_6 besteht aus 6 Drehungen (Drehwinkel $0°, 60°, \ldots, 300°$) und 6 Spiegelungen

$\Rightarrow |D_6| = 12$

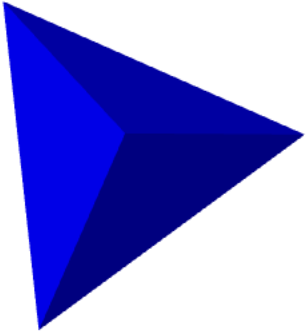
Definition der Plantonischen Körper

Zwei Teilmengen $S, T \subseteq \mathbb{R}^3$ werden als kongruent bezeichnet, wenn ein $\phi \in \mathcal{B}_n$ mit $\phi(S) = T$ existiert.

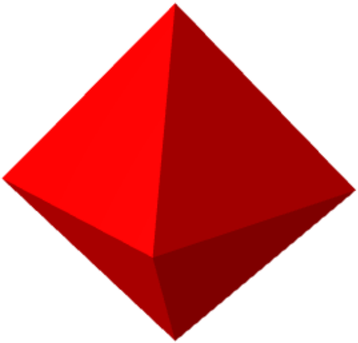
Definition (1.8)

Ein nicht ausgeartetes Polytop im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet man als regulär oder auch als Platonischen Körper, wenn all seine Seiten zueinander kongruente regelmäßige n-Ecke sind und sich an jeder Ecke dieselbe Anzahl von Seiten treffen.

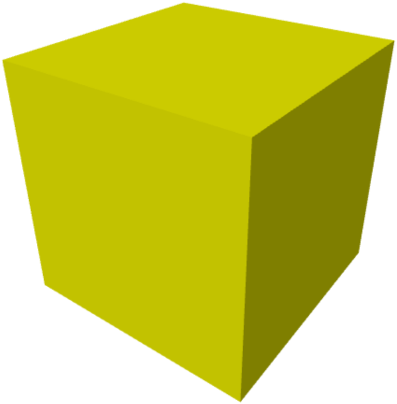
Platonische Körper - Tetraeder



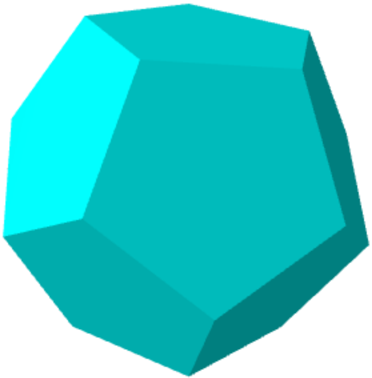
Platonische Körper - Oktaeder



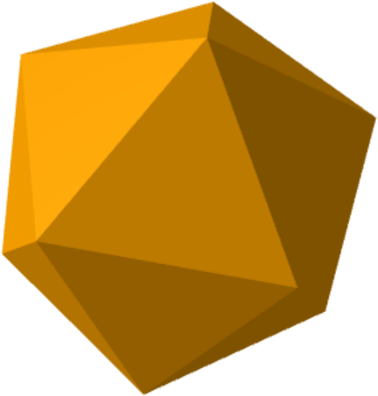
Platonische Körper - Würfel



Platonische Körper - Dodekader



Platonische Körper - Ikosaeder



Die Symmetriegruppen der platonischen Körper

Definition (1.9)

Bezeichnet $\mathbb{T}$ einen beliebigen Tetraeder, dann nennt man $\mathrm{Sym}(\mathbb{T})$ eine Tetraedergruppe und $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{T})$ eine eigentliche Tetraedergruppe. Ist $\mathbb{O}$ ein Oktaeder, dann wird $\mathrm{Sym}(\mathbb{O})$ eine Oktaedergruppe und $\mathrm{Sym}^+(\mathbb{O})$ eine eigentliche Oktaedergruppe. Entsprechend werden (eigentliche) Würfelgruppen, Dodekaedergruppen und Ikosaedergruppen definiert.