Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
14.04.2025

Algebra und Zahlentheorie I

(Lehramt Gymnasium, neue Studienordnung)

Nachschreibklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (3+4+3 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Wir betrachten in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ die beiden Untergruppen

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F}_p^\times \ , \ b \in \mathbb{F}_p \right\} \quad \text{und} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass N ein Normalteiler von G ist.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Gruppe G und die Ordnung der Faktorgruppe G/N.

(c) Sei nun $p = 7$. Zeigen Sie, dass in G/N die Elemente

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} N \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} N \quad \text{übereinstimmen.}$$

Lösung:

zu (a) Wir müssen zeigen, dass $ABA^{-1} \in N$ für beliebige $A \in G$ und $B \in N$ gilt. Seien $A \in G$ und $B \in N$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

mit $a \in \mathbb{F}_p^\times$ und $b, c \in \mathbb{F}_p$. Dann gilt

$$\begin{aligned} ABA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-2}b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & ac+b \\ \bar{0} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-2}b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & c \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad , \end{aligned}$$

und dieses Element ist tatsächlich in N enthalten.

zu (b) In der Definition von G gibt es $p-1$ Möglichkeiten für $a \in \mathbb{F}_p^\times$ und p Möglichkeiten für $b \in \mathbb{F}_p$. Daraus folgt $|G| = (p-1)p$. Offenbar ist

$$b \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & b \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

eine Bijektion zwischen $\mathbb{F}_p$ und N, somit gilt $|N| = |\mathbb{F}_p| = p$. Es folgt $|G/N| = \frac{|G|}{|N|} = p - 1$.

zu (c) Dies folgt aus der Tatsache, dass das Element

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{4} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

in N enthalten ist.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ in der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^\times$ des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $(1\ 2\ 5)(2\ 4)$ in der symmetrischen Gruppe S_5.

(c) Existiert eine Gruppe, in der außer dem Neutralelement genau 5 Elemente der Ordnung 6 und genau ein Element der Ordnung 2 existieren, und keine weitere Elemente? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Es gilt $\alpha^2 = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + \frac{2i}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = i$, $\alpha^4 = i^2 = -1$ und $\alpha^8 = 1$. Aus $\alpha^8 = 1$ und $\alpha^{8/2} = \alpha^4 \neq 1$ folgt $\mathrm{ord}(\alpha) = 8$ (weil 2 der einzige Primteiler von 8 ist).

zu (b) Es gilt $(1\ 2\ 5)(2\ 4) = (1\ 2\ 4\ 5)$, und jeder 4-Zykel ist ein Element der Ordnung 4 in S_5.

zu (c) Nehmen wir an, G wäre eine solche Gruppe. Dann wäre $|G| = 1 + 5 + 1 = 7$ deren Ordnung. Nach dem Satz von Lagrange dürfte G aber nur Elemente der Ordnung 1 und 7 enthalten, und keine Elemente der Ordnung 6. Also existiert eine Gruppe mit den angegebenen Eigenschaften nicht.

zu (d)

Name: ____________________

Aufgabe 3. (4+4+2 Punkte)

(a) Geben Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und Gruppen $G_1, ..., G_r$ an, so dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 54 zu genau einer dieser Gruppen G_j mit $1 \leq j \leq r$ isomorph ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Begründen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$ nicht zu $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ isomorph ist.

(c) Geben Sie eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 54 an.

Lösung:

zu (a) Die Aussage wird erfüllt durch $r = 3$ und $G_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $G_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.

zu (b) In $\mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$ ist $\bar{1}$ ein Element der Ordnung 54. Wären die Gruppen isomorph, dann müsste auch $G_2 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ein Element der Ordung 54 enthalten. Weil 18 ein gemeinsames Vielfaches von 6 und 9 ist, gilt aber $18 \cdot (a, b) = (\bar{0}, \bar{0})$ für alle $a \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. Die Ordnung jedes Elements in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ ist also ein Teiler von 18.

zu (c) Eine solche Gruppe ist die Diedergruppe D_{27}.

Name: ____________________

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 100.

(a) Beweisen Sie mit Hilfe der Sylowsätze, dass G einen abelschen Normalteiler N der Ordnung 25 besitzt.

(b) Begründen Sie, dass G auflösbar ist.

(c) Setzen wir nun außerdem voraus, dass G genau eine Untergruppe P der Ordnung 4 besitzt. Begründen Sie, dass G isomorph zu $P \times N$ ist.

Lösung:

zu (a) Sei ν_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen von G. Nach dem Dritten Sylowsatz gilt $\nu_5 \mid 4$, also $\nu_5 \in \{1, 2, 4\}$, und $\nu_5 \equiv 1 \bmod 5$. Wegen $2, 4 \not\equiv 1 \bmod 5$ folgt $\nu_5 = 1$. Nach dem Zweiten Sylowsatz ist die einzige 5-Sylowgruppe N ein Normalteiler von G. Wegen $|G| = 100 = 2^2 \cdot 5^2$ gilt $|N| = 5^2 = 25$. Als Gruppe von Primzahlquadratordnung ist N abelsch.

zu (b) Laut Vorlesung folgt aus der Auflösbarkeit von N und G/N die Auflösbarkeit von G. Es gilt $|G/N| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{100}{25} = 4$. Als Gruppen von Primzahlquadratordnung sind N und G/N abelsch, und somit auflösbar. Also ist auch G auflösbar.

zu (c) Als einzige Untergruppe der Ordnung 4 ist P die einzige 2-Sylowgruppe von G, und als solche ist sie nach dem Zweiten Sylowsatz ebenfalls Normalteiler von G. Es gilt also $N \trianglelefteq G$ und $P \trianglelefteq G$. Weil die Ordnung von N und P (25 und 4) teilerfremd sind, gilt $N \cap P = \{e\}$.

Außerdem stimmt das Komplexprodukt PN mit G überein. Denn wegen $N, P \trianglelefteq G$ ist PN eine Untergruppe von G (sogar ein Normalteiler), und aus $N \subseteq PN$ und $P \subseteq PN$ folgt $25 \mid |PN|$ und $4 \mid |PN|$, nach dem Satz von Lagrange. Wegen $\mathrm{kgV}(25, 4) = 100$ folgt $100 \mid |PN|$. Aus $|PN| \geq 100 = |G|$ und $PN \subseteq G$ folgt $G = PN$.

Insgesamt ist G damit ein inneres direktes Produkt von P und N. Daraus folgt $G \cong PN$.

zu (d)

Name: ____________________

Aufgabe 5. (3+4+3 Punkte)

(a) Weisen Sie nach, dass durch die Abbildung $\phi : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}^2$, $f \mapsto (f(0), f(1))$ ein Ringhomomorphismus gegeben ist.

(b) Sei $g = x(x-1)$. Zeigen Sie, dass das Hauptideal (g) im Polynomring $\mathbb{Q}[x]$ mit dem Kern von ϕ übereinstimmt.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Homomorpiesatzes für Ringe, dass $\mathbb{Q}^2$ als Ring zum Faktorring $\mathbb{Q}[x]/(g)$ isomorph ist.

Lösung:

zu (a) Es gilt $\phi(1) = (1,1) = 1_{\mathbb{Q}^2}$. Seien $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ vorgegeben. Dann gilt

$$\phi(f+g) = ((f+g)(0), (f+g)(1)) = (f(0)+g(0), f(1)+g(1)) = (f(0), g(0))+(f(1), g(1)) = \phi(f)+\phi(g)$$

und $\phi(fg) = ((fg)(0), (fg)(1)) = (f(0)g(0), f(1)g(1)) = (f(0), g(0)) \cdot (f(1), g(1)) = \phi(f) \cdot \phi(g)$.

zu (b) Für die Inklusion $(g) \subseteq \ker(\phi)$ genügt es, $g \in \ker(\phi)$ zu überprüfen. Dies folgt wegen $g(0) = g(1) = 0$ aus $\phi(g) = (g(0), g(1)) = (0,0) = 0_{\mathbb{Q}^2}$. Für die umgekehrte Inklusion sei $h \in \ker(\phi)$ vorgegeben. Dann gilt $(h(0), h(1)) = \phi(h) = 0_{\mathbb{Q}^2} = (0,0)$. Aus $h(0) = 0$ folgt, dass h von x geteilt wird, und aus $h(1) = 0$ folgt $(x-1) \mid h$. Wegen $\mathrm{ggT}(x, x-1) = 1$ folgt daraus, dass $g = x(x-1)$ ein Teiler von h ist, und dass h somit in (g) enthalten ist.

zu (c) Um den Homomorphiesatz anwenden zu können, müssen wir noch überprüfen, dass ϕ surjektiv ist. Sei $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ vorgegeben. Das Polynom $h = (b-a)x + a$ erfüllt $h(0) = a$ und $h(1) = b$. Es gilt also $\phi(h) = (h(0), h(1)) = (a,b)$. Der Homomorphiesatz liefert nun einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{Q}[x]/\ker(\phi) = \mathbb{Q}[x]/(g)$ und $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{Q}^2$.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $37u + 61v = 1$.

(b) Bestimmen Sie ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv 2 \bmod 37$ und $a \equiv 3 \bmod 61$.

(c) Bestimmen Sie das Inverse von $37 + 61\mathbb{Z}$ in der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z})^\times$.

Lösung:
zu (a)

q	a_n	x_n	y_n
–	61	1	0
–	37	0	1
1	24	1	−1
1	13	−1	2
1	11	2	−3
1	2	−3	5
5	1	17	−28

Die Gleichung $37u + 61v = 1$ wird also durch $u = -28$ und $v = 17$ gelöst.

zu (b) Die Zahl $c = 1 - 37u = 1037$ erfüllt $c \equiv 1 \bmod 37$ und $c \equiv 0 \bmod 61$. Die Zahl $d = 1 - 61 \cdot v = -1036$ erfüllt $d \equiv 0 \bmod 37$ und $d \equiv 1 \bmod 61$. Setzen wir $a = 2 \cdot c + 3 \cdot d = -1034$ dann gilt $a \equiv 2 \bmod 37$ und $a \equiv 3 \bmod 61$. (Es ist $37 \cdot 61 = 2257$ und $-1034 \equiv 1223 \bmod 2257$. Die Zahl 1223 erfüllt also die gleichen Kongruenzen.)

zu (c) Die Gleichung $37u + 61v = 1$ (mit u und v aus Teil (a)) liefert $37u \equiv 1 \bmod 61$. Dies liefert in $\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}$ die Gleichung $(37 + 61\mathbb{Z}) \cdot (u + 61\mathbb{Z}) = 1 + 61\mathbb{Z}$ und $(37 + 61\mathbb{Z})^{-1} = u + 61\mathbb{Z} = -28 + 61\mathbb{Z} = 33 + 31\mathbb{Z}$.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (5+2+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und zyklische Gruppen $C_1, ..., C_r$, so dass die prime Restklassengruppe $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ isomorph zu $C_1 \times ... \times C_r$ ist. (Es ist $1120 = 32 \cdot 5 \cdot 7$.)

(b) Geben Sie die Ordnung von $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ an und begründen Sie, dass die Gruppe nicht zyklisch ist.

(c) Geben Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung 2 in $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ an.
Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Primfaktorzerlegung und dem Chinesischen Restsatz gilt

$$(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad (\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times.$$

Weil 5 und 7 Primzahlen sind, gilt $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, außerdem $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Insgesamt gilt also

$$(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times \quad \cong \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}.$$

Es kann also $r = 4$, $C_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $C_2 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $C_3 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $C_4 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gewählt werden.

zu (b) Die Ordnung der Gruppe beträgt $\varphi(1120) = \varphi(32) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(7) = 16 \cdot 4 \cdot 6 = 384$. Wäre $(\mathbb{Z}/1120\mathbb{Z})^\times$ zyklisch, dann müsste es in der Gruppe ein Element der Ordnung 384 geben, und auf Grund der Isomorphie müsste dasselbe in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gelten. Weil 48 aber ein gemeinsames Vielfaches von 2, 8, 4 und 6 ist, gilt $48 \cdot (a, b, c, d)$ für alle $a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass die Ordnung sämtlicher Elemente in den Gruppen Teiler von 48 sind, und insbesondere gibt es in diesen Gruppen keine Elemente der Ordnung 384.

zu (c) Die Anzahl beträgt 15. (In jedem zyklischen Faktor C_j gibt es genau zwei Elemente der Ordnung 1 oder 2, also $2^4 = 16$ Elemente der Ordnung 1 oder 2 in der gesamten Gruppe. Abzüglich des Neutralelements kommt man auf die Anzahl 15.)

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (4+6 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{3+\sqrt{7}}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(i)]$ (jeweils mit Nachweis).

In Teil (a) denken Sie bitte daran, die Irreduzibilität des Polynoms nachzuweisen.

Lösung:
zu (a)

$$\alpha = \sqrt{3+\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = 3+\sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - 3 = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2-3)^2 = 7 \quad \Rightarrow$$
$$\alpha^4 - 6\alpha^2 + 9 = 7 \quad \Rightarrow \quad \alpha^4 - 6\alpha^2 + 2 = 0.$$

Also ist α Nullstelle des Polynoms $f = x^4 - 6x^2 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Außerdem ist dieses Polynom normiert, und irreduzibel nach dem Eisenstein-Kriterium (angewendet auf die Primzahl $p = 2$). Insgesamt ist f also das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

zu (b) Weil f das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$ ist, gilt $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(f) = 4$. Das Polynom $g = x^2 + 1$ ist in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ enthalten und hat i als Nullstelle. Wäre es in $\mathbb{Q}(\alpha)[x]$ reduzibel, dann müssten wegen $\mathrm{grad}(g) = 2$ die Nullstellen $\pm i$ in $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegen. Aber dies ist wegen $\mathbb{Q}(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ und $\pm i \notin \mathbb{R}$ nicht der Fall. Insgesamt ist damit $g = \mu_{i,\mathbb{Q}(\alpha)}$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(\alpha)] = [\mathbb{Q}(\alpha)(i) : \mathbb{Q}] = \mathrm{grad}(g) = 2$. Mit der Gradformel erhalten wir

$$[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \quad = \quad 2 \cdot 4 \quad = \quad 8.$$

Wegen $\pm i \notin \mathbb{Q}$ und $\mathrm{grad}(g) = 2$ ist g auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel. Es folgt $\mu_{i,\mathbb{Q}} = 2$ und $[\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] = 2$. Eine weitere Anwendung der Gradformel liefert

$$8 \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(i)] \cdot [\mathbb{Q}(i) : \mathbb{Q}] \quad = \quad [\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(i)] \cdot 2$$

und somit $[\mathbb{Q}(\alpha, i) : \mathbb{Q}(i)] = 4$.