H14T2A4

Sei G eine endliche Gruppe, $H \leq G$ und p eine Primzahl, die die Ordnung von H teilt. Sei P eine p-Sylowgruppe von G.

(a) Zeigen Sie, dass ein $g \in G$ existiert, so dass $H \cap g^{-1}Pg$ eine p-Sylowgruppe von H ist.

(b) Zeigen Sie anhand eines konkreten Beispiels, dass $H \cap P$ im Allgemeinen keine p-Sylowgruppe von H ist.

zu (a) Sei H_p eine p-Sylowgruppe von H.

Dann ist eine Gruppe von p-Potenzordnung und

Korrektur letzte Zeile: „Dann ist H_p eine Gruppe von …“

somit auch eine p-Untergruppe von G. Laut Erstem Sylowsatz ist jede p-Untergruppe von G in einer p-Sylowgruppe enthalten. Es gibt somit eine p-Sylowgruppe P' von G mit $P' \supseteq H_p$. Es gilt $H \cap P' = H_p$. Denn die Inklusion „$\supseteq$" folgt aus $H_p \subseteq H$ und $H_p \subseteq P'$. Da H_p bereits eine p-Untergruppe von H mit größt möglicher Ordnung ist, und $H \cap P'$ zumindest eine p-Untergruppe von H, folgt aus der Inklusion „$\supseteq$" bereits Gleichheit.

Da nach dem 2. Sylowsatz je zwei p-Sylowgruppen von G konjugiert sind, existiert ein $g \in G$ mit $P' = g^{-1} P g$. Es folgt $H \cap g^{-1} P g = H_p$, d.h. $H \cap g^{-1} P g$ ist eine p-Sylowgr. von H.

<u>zu (b)</u> Sei $G = S_3$, $p = 2$, $P = \langle (12) \rangle$ und $H = \langle (13) \rangle$.
Dann gilt $P \cap H = \{id\}$. Offenbar ist P eine 2-Sylowgruppe von S_3 (wegen $|S_3| = 2^1 \cdot 3^1$ und $|P| = 2$), aber $P \cap H$ ist keine 2-Sylowgruppe von H, denn wegen $|H| = 2$ sind die 2-Sylowgruppen von H die Untergr. von H der Ordnung 2 (also nur H selbst). $\square$

eine

P g

ass
ist.

und

<u>Übung</u>: Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl und P eine p-Sylowgruppe von G.
Zeigen Sie: $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$
(Hinweis: Betrachten Sie p-Sylowgruppen in $N_G(P)$.)

Ergänzung zu den Sylowsätzen:
Ist G eine endl. Gruppe, p eine Primzahl, ν_p die Anzahl der p-Sylowgr. von G und P eine -Sylowgruppe, dann gilt $\nu_p = (G : N_G(P))$ (wird <u>nicht</u> für die Übung gebraucht)
(Die Gleichung erhält man durch Anwendung der Gleichung $(G : G_x) = |G(x)|$ auf die Operation von G auf der Menge der Sylowgruppen.)

Semidirekte Produkte

Def: Seien N und U Gruppen und $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Homomorphismus. Dann ist $(N \times U, *)$ mit der Verknüpfung

$$(n_1, u_1) * (n_2, u_2) = \big(n_1 \cdot \underbrace{\phi(u_1)}_{\in \mathrm{Aut}(N)}(n_2),\ u_1 u_2\big)$$

eine Gruppe, das äußere semidirekte Produkt von N und U bzgl. ϕ (Notation: $N \rtimes_\phi U$)

Satz: Seien N, U, ϕ wie oben.

(i) Die Gruppe $N \rtimes_\phi U$ ist genau dann nichtabelsch, wenn N oder U nicht abelsch oder der Homomorphismus ϕ nichttrivial ist, d.h. das $\phi(u) = \mathrm{id}_N$ nicht für alle $u \in U$ gilt.

(ii) Ist G eine Gruppe und inneres semidirektes Produkt von $N \trianglelefteq G$ und $U \leq G$ (d.h. es gilt $U \cap N = \{e\}$ und $NU = G$), dann gilt $G \cong N \rtimes_\phi U$, wobei $\phi : U \to \mathrm{Aut}(N)$ durch $\phi(u) = \tau_u$ definiert ist, mit $\tau_u(n) = unu^{-1}$ für alle $n \in N$, $u \in U$.

Erinnerung:

(i) Ist G eine zyklische Gruppe, $g \in G$ mit $G = \langle g \rangle$ und H eine weitere Gruppe sowie $h \in H$ und gilt entweder $\mathrm{ord}(g) = \infty$ oder $\mathrm{ord}(g) \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{ord}(h) \mid \mathrm{ord}(g)$, dann existiert ein eindeutig bestimmter Hom $\phi : G \to H$ mit $\phi(g) = h$

us.

pfang

z)

odukt

$\rtimes_\phi U)$

dann

ucht

ϕ nicht-

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Isom. $\mathrm{Aut}(G) \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, falls G zyklisch von Ordnung n ist.

(iii) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremd, dann gilt $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Für jede ungerade Primzahl p und jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/p^{r-1}(p-1)\mathbb{Z},$$

außerdem

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\times = \{\bar{1}\},\quad (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

und

$$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z} \text{ für } r \geq 3.$$

<u>Def.</u> Eine Gruppe G heißt <u>auflösbar</u>, wenn ein $r \in \mathbb{N}_0$ mit $G^{(r)} = \{e\}$ existiert, wobei $G^{(r)}$ die <u>r-te Kommutatorgruppe</u> von G bezeichnet.

für

...ebtes

...s gilt

gilt

(N) durch

$) = unu^{-1}$

$g \in G$ mit

...ppe sowie

$g) = \infty$ oder

dann existiert

$G \to H$ mit $\varphi(g) = h$

<u>wichtig:</u> (i) Jede abelsche Gruppe ist auflösbar

(ii) Ist G eine Gruppe und $N \trianglelefteq G$, dann gilt die Äquivalenz

$$G \text{ ist auflösbar} \iff N \text{ und } G/N \text{ sind auflösbar}$$

(iii) Jede Gruppe von p-Potenzordnung (p Primzahl) ist auflösbar.

<u>F20T1A3</u>

(a) Geben Sie die Definition der Auflösbarkeit einer Gruppe an.

(siehe oben, eventuell sollte man auch noch die Definition der höheren Kommutatorgruppen $G^{(r)}$ angeben)

(b) Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 2020 auflösbar ist.

Es ist $2020 = 20 \cdot 101 = 2^2 \cdot 5^1 \cdot 101$

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2020 und ν_p für $p \in \{2, 5, 101\}$ jeweils die Anzahl der p-Sylowgruppen von G. 3. Sylowsatz $\Rightarrow$ $\nu_{101} \mid 2^2 \cdot 5^1 \Rightarrow \nu_{101} \leq 20$, außerdem $\nu_{101} \equiv 1 \mod 101$. Aus $\nu_{101} \leq 20 < 101$ und $\nu_{101} \equiv 1 \mod 101$ folgt $\nu_{101} = 1$. Sei N die einzige 101-Sylowgruppe von G. 2. Sylowsatz, $\nu_{101} = 1 \Rightarrow N \trianglelefteq G$. Laut Vorlesung folgt die Auflösbarkeit von G aus der Auflösbarkeit von N und G/N. Da $|N| = 101$ eine Primzahl ist, ist

$\nu_{101} \mid 2^2 \cdot 5^1 \Rightarrow \nu_{101} \leq 20$, außerdem

N zyklisch und damit auch abelsch und auflösbar.
Die Faktorgruppe $\bar{G}$ hat die Ordnung
$(G:N) = \frac{|G|}{|N|} = \frac{2020}{101} = 20$. Um die Auflösbarkeit von $\bar{G}$ nachzuweisen, wenden wir nochmals die Sylowsätze an. Für $p \in \{2,5\}$ sei $\bar{\nu}_p$ die Anzahl der p-Sylowgr. von $\bar{G}$. 3. Sylowsatz $\Rightarrow$
$\bar{\nu}_5 \mid 4 \Rightarrow \bar{\nu}_5 \in \{1,2,4\}$, außerdem $\bar{\nu}_5 \equiv 1 \bmod 5$,
$2,4 \not\equiv 1 \bmod 5 \rightarrow \bar{\nu}_5 = 1$ Sei $\bar{P}$ die einzige 5-Sylowgr. von $\bar{G}$. $\bar{\nu}_5 = 1 \Rightarrow \bar{P} \trianglelefteq \bar{G}$.
Die Auflösbarkeit von $\bar{G}$ folgt aus der Auf-

... Ordnung = 1010.

Sei $G_3 = D_{1010}$. $[2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101]$

Konstruiere eine weitere nicht-abelsche Gruppe der Ord-

lösbarkeit von $\bar{P}$ und $\bar{G}/\bar{P}$. Weil $|\bar{P}| = 5$ und $|\bar{G}/\bar{P}| = \frac{|\bar{G}|}{|\bar{P}|} = \frac{20}{5} = 4$ beides Primzahlpotenzen sind, sind $\bar{P}$ und $\bar{G}/\bar{P}$ tatsächlich beide auflösbar.

(c) Geben Sie zwei nicht-isomorphe abelsche und zwei nicht-isomorphe nicht-abelsche Gruppen der Ordnung 2020 an.

Sei $G_1 = \mathbb{Z}/2020\mathbb{Z}$ und $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$.
Diese Gruppen sind offenbar abelsch von Ordn. 2020.
Ang. $G_1 \cong G_2$. Weil $\bar{1}$ in G_1 Ordnung 2020 hat, müsste auch G_2 ein Element dieser Ordnung haben. Es gilt

... die

...satz,

...die

...von

... . ist

$1010 \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{0}, \bar{0})$ $\forall a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}/1010\mathbb{Z}$, deshalb gibt es in G_2 nur Elemente mit Ordnung ≤ 1010.

Sei $G_3 = D_{1010}$. $[2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101]$

Konstruiere eine weitere nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2020 als äußeres semidirektes Produkt. Laut Vorlesung gilt $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times$, und weil 101 Primzahl ist, gilt außerdem $(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$. Sei $\iota : \mathbb{Z}/100\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus. Weil $\overline{20} \in \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ ein Element der Ordnung 5 ist ($\overline{20} \neq \bar{0}$, $5 \cdot \overline{20} = \bar{0}$), ebenso der Erzeuger $\bar{1}$ der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, gibt es einen Homomorphismus $\phi : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ mit $\phi(\bar{1}) = \overline{20}$.

Wegen $\phi(\bar{1}) \neq \bar{0}$ ist dieser nichttrivial, und weil ι ein Isomorphismus ist, gilt dasselbe für den Hom. $\psi: \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/101\mathbb{Z})$ geg. durch $\psi = \iota \circ \phi$. Laut Vorlesung ist $\tilde{G}_4 = \mathbb{Z}/101\mathbb{Z} \rtimes_\psi \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $101 \cdot 5 = 505$. Damit ist $G_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \tilde{G}_4$ nicht-abelsch von Ordnung 2020.

Laut Vorlesung ist D_n für $n \geq 3$ nichtabelsch von Ordnung $2n$, also ist G_3 nicht-abelsch von Ordn. 2020.

noch z.zg.: G_3 und G_4 sind nicht isomorph

Laut Vl. sind die Elemente von D_n alle von Ordnung 2 oder Teiler von n. Daraus folgt, dass

die

Su

der

und

ist ka

Also s

Übung

Übung

lle
geg.
lsche
t ist
2020
h von
dn. 2020.
morph
von
gt, dass

die Elementordn. in G_3 alles Teiler von 1010 sind. In G_4 ist $g = (\bar{1}, e_{\tilde{G}_4})$ ein Element der Ordnung 4, wegen $g^2 = (\bar{2}, e^2_{\tilde{G}_4}) \neq e_{G_4}$ und $g^4 = (\bar{4}, e^4_{\tilde{G}_4}) = (\bar{0}, e_{\tilde{G}_4}) = e_{G_4}$, aber 4 ist kein Teiler von $1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$.

Also sind G_3 und G_4 nicht isomorph.

Übung zur Auflösbarkeit: F22T2A2

Übung zum äußeren semidirekten Prod.: H16T2A2

Anmerkung:

Ein naheliegender Gedanke ist, die Gruppe G_4 durch das direkte Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_{505}$ zu ersetzen und sich damit die Konstruktion des äußeren semidirekten Produkts zu sparen. Leider funktioniert das nicht, weil diese Gruppe zu G_3 isomorph ist. Algemein kann man zeigen, dass für jede ungerade Zahl $m \geq 3$ die Gruppen D_{2m} und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_m$ isomorph sind.