Def: Sei $\cdot : G \times X \to X$ eine Gruppen-operation (wobei G eine Gruppe, X eine Menge bezeichnet). Eine Teilmenge $R \subseteq X$ wird *Repräsentantensystem der Bahnen* der Operation genannt, wenn jede Bahn der Operation genau ein Element aus R enthält (gleichbedeutend: Die Abbildung von R in die Menge B der Bahnen geg. durch $x \mapsto G(x)$ ist bijektiv).

Die Mächtigkeit von R ist dann also gleich der Anzahl $|\mathcal{B}|$ der Bahnen.

<u>H25T1A1</u> (c) geg. $G = GL_n(\mathbb{C})$ und $Nil_n(\mathbb{C})$ = Menge der nilpotenten Matrizen in $M_{n,\mathbb{C}}$ bereits gezeigt: Es existiert eine Gruppenoperation $\cdot : G \times Nil_n(\mathbb{C}) \to Nil_n(\mathbb{C})$ geg. durch $(T, A) \mapsto TAT^{-1}$

Aufgabe: Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation für $n = 4$.

Sei $R \subseteq M_{4,\mathbb{C}}$ die Teilmenge

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = 0_{M_{4,\mathbb{C}}} = A_0,\ \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = A_1,\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = A_2,\right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = A_3,\ \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} = A_4 \right\}$$

Beh.: R ist ein Repräsentantensystem der Bahnen der Operation.
Das charakteristische Polynom aller 5 Matrizen ist gleich $x^4 \in \mathbb{C}[x]$. Daraus folgt, dass alle Matrizen nilpotent sind, also in $\mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$ liegen.

Das charakteristische Polynom aller 5 Matrizen ist gleich $x^4 \in \mathbb{C}[x]$. Daraus folgt, dass alle Matrizen

Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$ eine Bahn der Operation.

zu überprüfen: (i) $\mathcal{B}$ enthält ein Element aus R

(ii) $\mathcal{B}$ enthält nicht mehr als ein Element aus R

zu (i) Sei $A \in \mathrm{Nil}_4(\mathbb{C})$ mit $\mathcal{B} = G(A)$.

Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass A ähnlich zu einer Matrix J in Jordanscher Normalform ist.

$A \in \mathrm{Nil}_4(\mathbb{C}) \overset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \chi_A = x^4$. Da ähnliche Matrizen dasselbe char. Polynom haben, gilt auch $\chi_J = x^4$. $\Rightarrow$ Alle Jordanblöcke von J haben den Eigenwert 0.

Seien r die Anzahl der Jordanblöcke von J und $(n_1, \dots, n_r)$ die Größen der Jordanblöcke, aufsteigend geordnet.

Korrektur: Wir haben oben die Menge aller Bahnen mit $\mathcal{B}$ bezeichnet. Für eine einzelne Bahn sollte besser die Bezeichnung B verwendet werden.

Wegen $J \in M_{4,\mathbb{C}}$ gilt $\sum_{j=1}^{r} n_j = 4 \Rightarrow$
$r \le 4$, $(n_1, \dots, n_r) \in \{(1,1,1,1), (1,1,2), (2,2), (1,3), (4)\}$. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass zwei Matrizen in JNF mit denselben Jordanblöcken bis auf Reihenfolge ähnlich sind. $\Rightarrow$ Im Fall $(n_1, \dots, n_r) = (1,1,1,1)$ ist J ähnlich zu A_0, im Fall $(n_1, \dots, n_r) = (1,1,2)$ zu A_1 usw., d.h. auf jeden Fall ist J ähnlich zu A_j für ein j aus $\{0,1,2,3,4\}$. A ähnlich zu J, J ähnlich zu A_j $\Rightarrow$ A ähnlich zu A_j $\Rightarrow \exists\, T \in GL_4(\mathbb{C})$

mit $A_j = TAT^{-1} = T \cdot A \in G(A)$,

außerdem $A_j \in R$

<u>zu (ii)</u> Angenommen, es gibt $i, j \in \{0, \dots, 4\}$ mit $i \neq j$ und $A_i, A_j \in G(A) \Rightarrow A_i, A_j$ sind beide ähnlich zu $A \Rightarrow A_i$ ähnlich zu A_j

$\xrightarrow{\text{LinAlg}}$ A_i, A_j enthalten bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke. <u>aber:</u> In R gibt es keine zwei Matrizen mit gleichen Jordanblöcken bis auf Reihenfolge.

Die Anzahl der Bahnen ist also geg. durch

$$|\mathcal{B}| = |R| = 5 \qquad \square$$

Korrektur: Hier bezeichnet $\mathcal{B}$ wieder die Menge aller Bahnen der Operation.

$\Longrightarrow$

$\dots, (2,2),$

lgebra

JNF

f Reihen-

$\dots n_r) =$

Fall

h. auf

ein j aus

J ähnlich

$T \in GL_4(\mathbb{C})$

<u>Frage</u>: Geg. eine diagonalisierbare Matrix A in $M_{n,K}$ ($n \in \mathbb{N}$, K Körper), wie findet man eine invertierbare Matrix $T \in GL_n(K)$, so dass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist?

- Berechne χ_A, und bestimme die Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ ($r \in \mathbb{N}$).
- Bestimme für $1 \leq j \leq r$ eine geordnete Basis B_j von $Eig(A, \lambda_j) = \ker(A - \lambda_j E)$.
- Setze $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ (alle Basen B_j in einem Tupel hintereinander geschrieben).

Sei T die Matrix mit den Elementen

A_j

n A_j

ieselben

wei

henfolge.

ch

$\square$

von $\mathbb{B}$ als Spalten. Dann ist $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix.

(Grund: Die Matrix $M_{\mathbb{B}}(\phi_A)$ ist eine Diagonalmatrix, denn $\phi_A : K^n \to K^n,\ v \mapsto Av$ bildet jedes Element v aus $\mathbb{B}$ jeweils auf ein Vielfaches von v ab (v ist Eigenvektor von A).
Nach Konstruktion von T gilt $T = T^{\mathbb{B}}_{\mathcal{E}}$, wobei $\mathcal{E}$ die Einheitsbasis von K^n bezeichnet. Der Satz vom Basiswechsel liefert $T^{-1}AT = T^{\mathcal{E}}_{\mathbb{B}} M_{\mathcal{E}}(\phi_A) T^{\mathbb{B}}_{\mathcal{E}}$
$= M_{\mathbb{B}}(\phi_A)$.)

Gruppen

Beispiele für abelsche Gruppen:

(i) Ist R ein Ring, dann ist $(R,+)$ eine abelsche Gruppe, also z.B. $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$.

(ii) Ist V ein K-Vektorraum (K Körper), dann ist $(V,+)$ eine abelsche Gruppe, z.B. $(K^n,+)$, $(M_{n,K},+)$.

(iii) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ $(n\in\mathbb{N})$ und beliebige direkte Produkte davon, z.B. $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$. Lt. Vl. ist jede endl. abelsche Gruppe isomorph zu einer Gruppe der Form $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}$, mit $r\in\mathbb{N}_0$, $n_1,\ldots,n_r$ Primzahlpotenzen

(iv) S_n für $n \le 2$, A_n für $n \le 3$ und V_4,
die Kleinsche Vierergruppe ($V_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Beispiele für nicht-abelsche Gruppen:

(i) S_n für $n \ge 3$, A_n für $n \ge 4$

(ii) $GL_n(K)$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, K Körper

(iii) direkte Produkte der Form $G_1 \times \dots \times G_r$, wobei mindestens eine der Gruppen G_j nicht-abelsch ist

(iv) semidirekte Produkte $N \rtimes_\varphi U$, wobei N nicht-abelsch, U nicht abelsch oder φ ein nichttrivialer Hom. $\varphi: U \to \mathrm{Aut}(N)$ ist

M25

durch

(a) Ze

(w

Bs

A4

(b) Ze

Fo

un

Beispiele für abelsche Gruppen:

(v) Diedergruppen D_n $(n \geq 3)$ (Jedes D_n ist eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $2n$.)

<u>Def.</u>: <u>Untergruppe</u> einer Gruppe $(G, \cdot)$ = Teilmenge $U \subseteq G$ mit den Eigenschaften $e_G \in U$ und $ab, a^{-1} \in U$ für alle $a, b \in U$

<u>Erinnerung</u>: Ist G eine Gruppe und $S \subseteq G$, dann existiert eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\langle S \rangle$ von G mit $\langle S \rangle \supseteq S$, so dass jede Untergr. U von G mit $U \supseteq S$ die Bedingung $U \supseteq \langle S \rangle$ erfüllt. Man nennt $\langle S \rangle$ die von S <u>erzeugte</u> Untergr.

$\langle S \rangle$ von G mit $\langle S \rangle \supseteq S$, so dass jede Untergr.
U von G mit $U \supseteq S$ die Bedingung $U \supseteq \langle S \rangle$

H25T2A2 Seien $A, B \in GL_2(\mathbb{F}_3)$ geg. durch $A = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Sei $G = \langle A, B \rangle$.

(a) Zeigen Sie: $A^4 = E$, $B^2 = A^2$, $BAB^{-1} = A^3$
(wobei E = Einheitsmatrix in $GL_2(\mathbb{F}_3)$)

Bsp: $A^2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$.

$A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = E$

(b) Zeigen Sie, dass jedes Element in G die Form $A^k B^l$ mit $0 \leq k \leq 3$ und $l \in \{0, 1\}$ hat, und bestimmen Sie die Ordnung von G.

Betrachte in $GL_2(\mathbb{F}_3)$ die Teilmenge

$U = \{A^k B^l \mid 0 \le k \le 3, l \in \{0,1\}\}$. Wir zeigen, dass U die definierenden Eigenschaften von $\langle A, B \rangle$ besitzt, im Einzelnen

(0) U ist Untergruppe von $GL_2(\mathbb{F}_3)$

(1) $U \supseteq \{A, B\}$

(2) Ist V eine beliebige Untergruppe von $GL_2(\mathbb{F}_3)$ mit $V \supseteq \{A, B\}$, dann folgt $V \supseteq U$.

(Daraus folgt dann $U = \langle A, B \rangle$.)

zu (0) zu überprüfen: (i) $E \in U$

(ii) Für alle $C, D \in U$ gilt $CD, C^{-1} \in U$.

zu (i) Es gilt $E = A^0 B^0 \in U$.

zeigen,

von

ven

gt $V \supseteq U$.

)

$C^{-1} \in U$.

<u>zu (ii)</u> Seien $C, D \in U$. $\Rightarrow \exists\, k, l, m, n$ mit $k, m \in \{0, \dots, 3\}$, $l, n \in \{0, 1\}$, so dass $C = A^k B^l$, $D = A^m B^n$

Zeige zunächst: Für alle $u \in \mathbb{Z}$ gilt $A^u = A^j$, für ein $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Sei $u \in \mathbb{Z}$. Division mit Rest $\Rightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ und $j \in \{0, \dots, 3\}$ mit $u = 4q + j \Rightarrow A^u = A^{4q+j}$

$$= (A^4)^q A^j \underset{A^4 = E}{=} E^q A^j = A^j$$

ebenso: $B^4 = (B^2)^2 = (A^2)^2 = A^4 = E$

Somit existiert für jedes $u \in \mathbb{Z}$ ein $j \in \{0, \dots, 3\}$ mit $B^u = B^j$ (Fortsetzung nächste Stunde)

<u>Übung:</u> F15T3A1