

Die Jordansche Normalform

Def. K Körper, $n \in \mathbb{N}$

- (i) Sei $\lambda \in K$. Eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ in $M_{n,K}$ ist eine Matrix der Form

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \quad (\text{Bsp.: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})$$

- (ii) Eine Matrix in Jordanscher Normalform (JNF) ist eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & J_r \end{pmatrix}$ wobei $J_1, \dots, J_r$ Jordanmatrizen bezeichnen. Die J_i werden die Jordanblöcke der JNF genannt.



$e \cdot x = x$ und $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$
 wobei e das Neutralelement von G bezeichnet.

Beispiel: eine Matrix bestehend aus drei Jordanblöcken

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =: J$$

Def. Sei V ein endl.-dim. K -Vektorraum und $\phi \in \text{End}_K(V)$

Eine geordnete Basis B von V wird Jordanbasis von V bzgl. ϕ genannt, wenn die Darstellungsmatrix $M_B(\phi)$ eine Matrix in JNF ist.

Hauptsatz Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A \in M_n(K)$.

- i) Die Matrix A ist genau dann ähnlich zu einer Matrix J in JNF, wenn χ_A in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt (unser erfüllt für $K = \mathbb{C}$).

(ii) Für jeden Eigenwert λ von A ist die geometrische Vielfachheit $m_g(A, \lambda)$ gleich der Anzahl der Jordanblöcke zu λ zum Eigenwert λ .

(im Beispiel: $m_g(J, 3) = 2$, $m_g(J, 5) = 1$)

(iii) Für jeden Eigenwert λ von A ist die algebraische Vielfachheit $m_a(A, \lambda)$ gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke zum Eigenwert λ .

(im Beispiel: $m_a(A, 3) = 2 + 1 = 3$, $m_a(A, 5) = 2$)

(iv) Für jeden Eigenwert λ ist die Vielfachheit von λ als Nullstelle des Minimalpolynoms M_A gleich der Größe des größten Jordanblocks. (im Beispiel: $M_J = (x-3)^2(x-5)^2$)

(v) Zwei Matrizen $J, J' \in M_{n,k}$ in JNF sind genau dann ähnlich zueinander, wenn sie bis auf Reihenfolge dieselben Jordanblöcke enthalten.

Bem: Eine Matrix $A \in M_{n,k}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn χ_A in Linearfaktoren zerfällt und das Minimalpolynom μ_A nur einfache Nullstellen hat.

Grund: χ_A zerfällt $\Rightarrow A$ ist ähnlich zu einer Matrix J in JNF
Satz (iv) $\Rightarrow$ Alle Jordanblöcke in J haben Größe 1 gdw. wenn μ_A nur einfache Nullstellen hat. Dies ist wiederum gleichbedeutend damit, dass J eine Diagonalmatrix ist.

116T3A1 Sei K ein Körper, V ein endl.-dim. K -Vektorraum, ϕ ein Endomorphismus von V mit zerfallendem charakteristischem Polynom χ_ϕ . Weiter sei $\mathcal{B}$ eine Jordanbasis von V bzgl. ϕ und $J = M_{\mathcal{B}}(\phi)$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) Alle Eigenräume von ϕ sind eindimensional.
- (ii) Für jeden Eigenwert von ϕ existiert in J genau ein Jordanblock.
- (iii) Das Polynom χ_ϕ stimmt mit dem Minimalpolynom μ_ϕ von ϕ überein.

"(i) $\Leftrightarrow$ (iii)" Für jeden Eigenwert λ von ϕ ist lt. VL $\mu_\phi(\phi, \lambda)$, die geom. Vflh von λ bzgl. ϕ , gleich der Anzahl der Jordanblöcke in J zum Eigenwert λ . Für jeden Eigenwert λ von ϕ gilt also die

Äquivalenz $\dim \text{Eig}(\phi, \lambda) = 1 \iff \mu_\phi(\phi, \lambda) = 1$
 $\iff$ Es existiert genau ein Jordanblock in J zum Eigenwert λ .

"(ii) $\iff$ (iii)" Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die Eigenwerte von ϕ .

Dann haben M_ϕ und χ_ϕ die Form

$$M_\phi = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{e_j}, \quad \chi_\phi = \prod_{j=1}^r (x - \lambda_j)^{f_j} \quad \text{mit}$$

$e_j, f_j \in \mathbb{N}$. Wegen $M_\phi | \chi_\phi$ gilt $e_j \leq f_j$ für $1 \leq j \leq r$.

" $\Rightarrow$ " Sei $j \in \{1, \dots, r\}$. Zz. v.l. ist die Größe des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ_j gleich e_j . Weil es nur einen Jordanblock zum Eigenwert λ_j gibt, ist dies zugleich die Summe der Größen aller Jordanblocke zum Eigenwert λ_j , und

diese Summe ist kl. vl. gleich der Vielfachheit f_j also:

$$e_j = f_j \text{ für } 1 \leq j \leq r \rightarrow M_\phi = \chi_\phi$$

" $\Leftarrow$ " Wegen $M_\phi = \chi_\phi$ folgt $e_j = f_j$ für $1 \leq j \leq r$. Dann ist die Größe e_j des größten Jordanblocks zum Eigenwert λ_j jeweils gleich der Summe der Größen aller Jordanblöcke zu diesem Eigenwert. Also kann es jeweils nur einen Jordanblock zum Eigenw. λ_j geben (sonst wäre die Summe echt größer). $\square$

Erinnerung:

- 1) 3
- Eine Operation einer Gruppe G auf einer Menge X ist eine Abbildung $\bullet : G \times X \rightarrow X$ mit der Eigenschaft $e \bullet x = x$ und $g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$ wobei e das Neutralelement von G bezeichnet.

- Eine Bahn dieser Operation ist eine Teilmenge von X der Form $G(x) = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ für ein $x \in X$.

Wichtiges Beispiel:

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $X = M_{n,K}$ und $G = GL_n(K)$. Dann ist durch $\cdot : G \times X \rightarrow X$,

$(T, A) \mapsto TAT^{-1}$ eine Operation von G auf X definiert,
 „Konjugation“

Dabei gilt für alle $A, B \in M_{n,K}$ genau dann $B \in G(A)$ (d.h. A, B liegen in derselben Bahn), wenn A und B ähnlich zueinander sind. (Grund: $B \in G(A) \Leftrightarrow$

$\exists T \in G: B = T \cdot A \Leftrightarrow \exists T \in GL_n(k): B = TAT^{-1}$
 $\Leftrightarrow A, B$ sind ähnlich)

H2ST1A1 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\text{Nil}_n(\mathbb{C})$ die
 Teilmenge der nilpotenten Matrizen A in $M_{n, \mathbb{C}}$,
 also der Matrizen, für die ein $p \in \mathbb{N}$ mit $A^p = 0_{n, \mathbb{C}}$
 existiert.

(a) Sei $B \in \text{Nil}_n(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass 0 der
 einzige Eigenwert von B ist, und geben Sie χ_B an.

Sei λ ein Eigenwert von B , z.zg. $\lambda = 0$. Sei $v \in \mathbb{C}^n$
 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ . Beh.: $B^m v = \lambda^m v$
 für alle $m \in \mathbb{N}$

wobei e das Neutralelement von G bezeichnet.

AT⁻¹ Ind.-Ans. Aus der Def. des Eigenvektors v folgt $B^1 v = Bv = \lambda v = \lambda^1 v$.

Ind.-Schritt $m \rightarrow m+1$: Ind.-V. $\Rightarrow B^m v = \lambda^m v \Rightarrow B^{m+1} v = B(B^m v)$
 $= B(\lambda^m v) = \lambda^m (Bv) = \lambda^m (\lambda v) = \lambda^{m+1} v \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$

$B \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists p \in \mathbb{N}$ mit $B^p = 0_{M_n, \mathbb{C}} \Rightarrow$

$\lambda^p v = B^p v = 0_{M_n, \mathbb{C}} v = 0_{\mathbb{C}^n} \xRightarrow[v \neq 0_{\mathbb{C}^n}]{\text{da } v \text{ Eigenvektor}} \lambda^p = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$B \in M_n, \mathbb{C} \Rightarrow \chi_B$ ist normiertes Polynom in $\mathbb{C}[x]$ vom Grad n

weil $\mathbb{C}$ algebraisch abg. ist, existiert eine Zerlegung $\chi_B = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$

von χ_B in Linearfaktoren. Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Nullstellen von χ_B und

damit die Eigenwerte von B . S.o. $\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \chi_B = x^n$

Dies zeigt, dass 0 der einzige Eigenwert von B ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch die Abbildungs-
vorschrift $(T, B) \mapsto TBT^{-1}$ eine Operation von
 $G = GL_n(\mathbb{C})$ auf der Menge $Nil_n(\mathbb{C})$ definiert ist.
(Dass G durch $(T, B) \mapsto TBT^{-1}$ auf $M_n(\mathbb{C})$
operiert, darf als bekannt vorausgesetzt werden.)

Betrachte die Abbildung $\circ : G \times Nil_n(\mathbb{C}) \rightarrow Nil_n(\mathbb{C})$
geg. durch $(T, B) \mapsto TBT^{-1}$. zeige:

- i) $\forall T \in G \forall B \in Nil_n(\mathbb{C}) : T \circ B \in Nil_n(\mathbb{C})$
($\Rightarrow \circ$ ist eine Abbildung $G \times Nil_n(\mathbb{C}) \rightarrow Nil_n(\mathbb{C})$)
- ii) Diese Abbildung ist eine Gruppenop. von G auf $Nil_n(\mathbb{C})$.

1. Teil und zum Eigenwert λ . Für jeden Eigenwert λ von ϕ gilt also die

zu (i) Sei $T \in GL_n(\mathbb{C})$ und $B \in Nil_n(\mathbb{C})$

2.33g: $T \cdot B \in Nil_n(\mathbb{C})$ Teil (a) $\Rightarrow \chi_B = x^n$

$T \cdot B = TBT^{-1} \Rightarrow B$ und $T \cdot B$ sind ähnlich

$\Rightarrow \chi_{T \cdot B} = \chi_B = x^n$ Satz von Cayley-Ham. $\Rightarrow$

$\chi_{T \cdot B}(T \cdot B) = 0 \Rightarrow (T \cdot B)^n = 0 \Rightarrow T \cdot B \in Nil_n(\mathbb{C})$

zu (ii) Sei $* : G \times M_{n,\mathbb{C}} \rightarrow M_{n,\mathbb{C}}, (T, A) \mapsto TAT^{-1}$

Die Angabe ist dies eine Operation von G auf $M_{n,\mathbb{C}}$.

Seien $T, U \in G$ und $A \in Nil_n(\mathbb{C})$. $\rightarrow E \cdot A = E * A = A$ * Gruppenop.

und $T \cdot (U \cdot A) = T \cdot (U * A) \stackrel{ii)}{=} T * (U * A) =$ * Gruppenop.

$(TU) * A = (TU) \cdot A$.