

H22T3A1

$L|K$ endl. Körpererweiterung

Spurabbildung $\text{Tr}_{L|K}: L \rightarrow K, \alpha \mapsto \text{Tr}(m_\alpha)$

wobei $m_\alpha: L \rightarrow L$ für jedes $\alpha \in L$ jeweils gegeben durch $x \mapsto \alpha x$ (wobei Spur eines Endomorphismus = Spur einer bel. Darstellungsmatrix) bereits erledigt:

(a) $\text{Tr}_{L|K}: L \rightarrow K$ ist K -lineare Abb.

(b) Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine K -Basis von L und

$$\Delta_{L|K}(x_1, \dots, x_n) = \det(\text{Tr}_{L|K}(x_i x_j))$$

z.zg: $\Delta_{L|K}$ ändert sich bei Übergang zu einer anderen Basis um ein Quadrat eines Elements aus $K^\times$

x)

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $b: L \times L \rightarrow K$ die Abbildung geg. durch $(\alpha, \beta) \mapsto \text{Tr}_{L|K}(\alpha\beta)$.

Beh. (1) b ist eine Bilinearform auf dem K -Vektorraum L

$$(2) (\text{Tr}_{L|K}(x_i x_j)) = M_B(b)$$

zu (1) Seien $\alpha, \alpha', \beta, \beta', c \in K$, zu überprüfen:

$$\text{ii) } b(\alpha + \alpha', \beta) = b(\alpha, \beta) + b(\alpha', \beta) \quad \text{iii) } b(\alpha, \beta + \beta') = b(\alpha, \beta) +$$

$$b(\alpha, \beta') \quad \text{iii) } b(c\alpha, \beta) = b(\alpha, c\beta) = c b(\alpha, \beta)$$

Die Bilinearform b ist symmetrisch, denn

$$\text{für alle } x, y \in L \text{ gilt } b(x, y) = \text{Tr}_{L|K}(xy) =$$

$$\text{Tr}_{L|K}(yx) = b(y, x). \text{ Deshalb folgt ii) direkt aus}$$

i), und in iii) reicht es, $b(c\alpha, \beta) = c b(\alpha, \beta)$ zu zeigen

$$\begin{aligned} \text{zu ii) } b(x+x', \beta) &= \text{Tr}_{L|K}((x+x')\beta) = \text{Tr}_{L|K}(x\beta + x'\beta) \\ &= \text{Tr}_{L|K}(x\beta) + \text{Tr}_{L|K}(x'\beta) = b(x, \beta) + b(x', \beta) \end{aligned}$$

$\uparrow \text{Tr}_{L|K} \text{ linear}$

$$\text{zu iii) } b(c\alpha, \beta) = \text{Tr}_{L|K}(c\alpha\beta) = c \text{Tr}_{L|K}(\alpha\beta) = c b(\alpha, \beta)$$

$\uparrow \text{Tr}_{L|K} \text{ linear}$

zu (2) Die Einträge von $M_B(b) = (a_{ij})$ sind nach Def. geg. durch $b(x_i, x_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$), und es gilt $b(x_i, x_j) = \text{Tr}_{L/K}(x_i x_j)$ für $1 \leq i, j \leq n$.

Sei nun $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ eine weitere geordnete Basis des K -Vektorraums L . Sei $T = T_{B'}^B$ Transformations-

matrixformel für Darstellungsmatrizen von Bilinearformen

$$\Rightarrow M_{B'}(b) = {}^t T M_B(b) T \quad \text{Sei } c = \det(T).$$

$$T \text{ invertierbar} \Rightarrow c \in K^\times \Rightarrow \Delta_{L/K}(x'_1, \dots, x'_n) = \det(M_{B'}(b)) = \det({}^t T) \det(M_B(b)) \det(T) = \det({}^t T) \det(T) = \det(T)^2 = c^2.$$

$$\det(T)^2 \det(M_B(b)) = c^2 \Delta_{L|K}(x_1, \dots, x_n)$$

(c) Sei $f = x^2 + px + q \in \mathbb{Q}[x]$ ein in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibles Polynom und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f . Sei $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechnen Sie $\Delta_{L|K}(1, \alpha)$.

Nach Def. gilt $\Delta_{L|K}(1, \alpha) = \det \begin{pmatrix} \text{Tr}_{L|K}(1) & \text{Tr}_{L|K}(\alpha) \\ \text{Tr}_{L|K}(\alpha) & \text{Tr}_{L|K}(\alpha^2) \end{pmatrix}$

Für jedes $\gamma \in L$ gilt $\text{Tr}_{L|K}(\gamma) = \text{Tr}(M_B(m_\gamma))$

wobei $m_\gamma: L \rightarrow L, \beta \mapsto \gamma\beta, B = (1, \alpha)$.

→ Benötige $M_B(m_\gamma)$ für $\gamma \in \{1, \alpha, \alpha^2\}$.

$$m_1(1) = 1 \cdot 1 = 1 = \underline{1} \cdot 1 + \underline{0} \cdot \alpha$$

$$m_1(\alpha) = 1 \cdot \alpha = \alpha = \underline{0} \cdot 1 + \underline{1} \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow M_B(m_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_{\alpha}(1) = \alpha \cdot 1 = \alpha = 0 \cdot 1 + 1 \cdot \alpha$$

$$m_{\alpha}(\alpha) = \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \stackrel{p(\alpha)=0}{=} -q - p\alpha = (-q) \cdot 1 + (-p) \cdot \alpha$$

$\alpha^2 + p\alpha + q = 0$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{B}}(m_{\alpha}) = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{pmatrix}$$

$$m_{\alpha^2}(1) = \alpha^2 \cdot 1 \stackrel{S.O.}{=} (-q) \cdot 1 + (-p) \cdot \alpha$$

$$m_{\alpha^2}(\alpha) = \alpha^2 \cdot \alpha = (-q - p\alpha) \cdot \alpha = -q\alpha - p\alpha^2 =$$

$$-q\alpha - p(-q - p\alpha) = -q\alpha + pq + p^2\alpha$$

$$= pq \cdot 1 + (p^2 - q) \alpha \Rightarrow M_{\mathcal{B}}(m_{\alpha^2}) = \begin{pmatrix} -q & pq \\ -p & p^2 - q \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(m_1)) = 1 + 1 = 2, \text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(m_{\alpha})) = -p$$

$$\text{Tr}(M_{\mathcal{B}}(m_{\alpha^2})) = p^2 - 2q$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{LIK}}(1, x) = \det \begin{pmatrix} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2q \end{pmatrix} = 2 \cdot (p^2 - 2q) - (-p)^2 \\ = p^2 - 4q$$

Def. Sei V ein endl.-dim. $\mathbb{R}$ -Vektorraum und b eine symmetrische Bilinearform.

(i) Man nennt eine geordnete Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis (ON-Basis) bzgl. b , wenn $b(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

(ii) b wird positiv definit genannt, wenn $b(v, v) > 0$ für jedes $v \in V \setminus \{0\}$ gilt.

(iii) Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ wird positiv definit genannt, wenn sie symmetrisch ist und $\forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $v^T A v > 0$.

Erinnerung:

- (1) Die Bilinearform b ist genau dann positiv definit, wenn eine ON-Basis von V bzgl. b existiert (und diese kann mit dem Gram-Schmidt-Verfahren berechnet werden).
- (2) Ob eine symm Matrix $A \in M_{n, \mathbb{R}}$ positiv definit ist, kann mit dem Hurwitz-Kriterium überprüft werden.
- (3) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar (Hauptachsentransformation).

H25T2A1 (a) gibt es eine Matrix $W \in M_{2, \mathbb{R}}$
mit ${}^t W W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$?

Wegen $1 > 0$ und $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 > 0$ folgt aus
dem Hurwitz-Kriterium, dass $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ positiv de-
finit ist. Bekanntlich ist durch $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $(v, w) \mapsto {}^t v A v$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ eine Bilinearform
auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Weil A symm. und positiv definit ist,
gilt dasselbe für g . Sei $B = (v_1, v_2)$ eine ON-Basis
von $\mathbb{R}^2$ bzgl. g und $T \in GL_2(\mathbb{R})$ die Matrix mit

v_1, v_2 als Spaltenvektoren, d.h. $T = J_{\Sigma}^B$ mit der Einheitsmatrix $\Sigma = (e_1, e_2)$. Transformationsformel

für Bilinearformen $\Rightarrow M_B(b) = {}^t T M_{\Sigma}(b) T$

Dabei ist $M_{\Sigma}(b) = A$ und $M_B(b) = E$ (Einheitsmatrix), weil B eine ON-Basis bzgl. b ist.

$$\Rightarrow E = {}^t T A T \Rightarrow ({}^t T)^{-1} E T^{-1} = A$$

$\Rightarrow {}^t (T^{-1}) T^{-1} = A$ Also erfüllt $W = T^{-1}$ die angegebene Gleichung.

Moodle: jil2189VQT

(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix mit charakteristischem Polynom $\chi_A = x^n + s_1 x^{n-1} + \dots + s_r x^{n-r} \in \mathbb{R}[x]$ mit $s_r \neq 0$. Zeigen Sie, dass $\text{rg}(A) = r$ gilt.

Als symmetrische Matrix ist A diagonalisierbar, d.h. es gibt eine Diagonalmatrix $D \in M_n(\mathbb{R})$ und eine Matrix $T \in GL_n(\mathbb{R})$ mit $D = TAT^{-1}$.
 D, A ähnliche Matrizen $\Rightarrow \chi_D = \chi_A$. Weil T und T^{-1} invertierbar sind, haben A, TA und $D = TAT^{-1}$

alle denselben Ring. Es genügt also z.zg:

$\text{rg}(D) = r$, unter der Vor. $\chi_D = x^n + s_1 x^{n-1} + \dots + s_t x^{n-r}$

Schreibe $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ mit

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\text{rg}(D) = |\{k \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_k \neq 0\}|$

außerdem: $\chi_D = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$. Sortiere $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so

um, dass ein $t \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $\lambda_1, \dots, \lambda_t \neq 0$ und

$\lambda_{t+1} = \lambda_{t+2} = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow \chi_D = x^{n-t} \prod_{j=1}^t (x - \lambda_j) \quad (*)$

Schreiben wir nun $\chi_D = x^n + s_1 x^{n-1} + \dots + s_{n-1} x + s_n$,

dann zeigt der Vergleich mit $(*)$, dass $s_j = 0$ für $j > t$

und $s_t = (-1)^t \prod_{j=1}^t \lambda_j \neq 0 \Rightarrow r = t = \text{rg}(D) = \text{rg}(A)$