F25T1A3

gegeben: $A \in M_{3,\mathbb{Q}}$ mit einem irred. char. Pol.
$\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ Nullstelle von χ_A
$\mathbb{Q}(\alpha)$ = von α erzeugter Zwischenkörper von $\mathbb{C} | \mathbb{Q}$
Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}(\alpha) \to \mathbb{Q}(\alpha)$, $\beta \mapsto \alpha\beta$

(a) (bereits erledigt) zeige: φ ist ein Endomorphismus des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$

(b) Berechnen Sie die darstellende Matrix $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bzgl. der geordneten Basis $\mathcal{B} = (1, \alpha, \alpha^2)$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$, und zeigen Sie $\chi_A = \chi_B$.

B

na

Erz

B e

ϕ

$\mathcal{B} = (1, \alpha, \alpha^2)$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$, und zeigen Sie $\chi_A = \chi_\mathcal{B}$

[Erinnerung: Ist allgemein $L|K$ eine Körpererweiterung, $\alpha \in L$ algebraisch über K, $\mu_{\alpha,K}$ das Minimalpolynom von α über K und $n = \operatorname{grad} \mu_{\alpha,K}$, dann ist $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1})$ eine geordnete Basis von $K(\alpha)$ als K-Vektorraum. In der Situation hier ist χ_A das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.]

Wegen $A \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{Q}}$ gilt $\operatorname{grad} \chi_A = 3$, d.h. $\exists\, a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $\chi_A = x^3 + ax^2 + bx + c$. $\chi_A(\alpha) = 0 \Rightarrow$
$\alpha^3 = -a\alpha^2 - b\alpha - c$. Wende φ auf die Elemente von $\mathcal{B}$ an und stelle die Bilder als Linearkombinationen von $\mathcal{B}$ dar.

Bem.
Polyn

ϕ ist diagonalisierbar $\Longleftrightarrow$ $M_B(\phi)$ ist diagonalisierbar.

$$\varphi(1) = \alpha \cdot 1 = \underline{\underline{0}} \cdot 1 + \underline{\underline{1}} \cdot \alpha + \underline{\underline{0}} \cdot \alpha^2$$
$$\varphi(\alpha) = \alpha \cdot \alpha = \underline{\underline{0}} \cdot 1 + \underline{\underline{0}} \cdot \alpha + \underline{\underline{1}} \cdot \alpha^2$$
$$\varphi(\alpha^2) = \alpha \cdot \alpha^2 = \alpha^3 = \underline{\underline{(-c)}} \cdot 1 + \underline{\underline{(-b)}} \cdot \alpha + \underline{\underline{(-a)}} \cdot \alpha^2$$

Somit ist $B = M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$.

$$\chi_B = \det(x \cdot E_3 - B)$$
$$= \det \begin{pmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & x+a \end{pmatrix} = x^2(x+a) + 0 + c - 0 - (-bx) - 0$$
$$= x^3 + ax^2 + bx + c = \chi_A$$

Bem.: Zwei Matrizen mit demselben charakteristischen Polynom sind im Allgemeinen nicht ähnlich zueinander.

Zum Beispiel sind $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ nicht ähnlich zueinander, obwohl $\chi_A = \chi_B = (x-2)^2$ gilt. (Nachweis für die Nicht-Ähnlichkeit siehe unten).

Wenn die beiden Matrizen diagonalisierbar sind, dann folgt aus der Gleichheit der char. Pol. bereits die Ähnlichkeit.

Def.: (i) Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ wird diagonalisierbar genannt, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist,

(iii) F
st
(iv) Pr
Die
bar,
und
Eigen
(Besitzt χ
ist die z
erfüllt
(c) Zeigen S
über $\mathbb{C}$
Wegen char

$\mid \mathbb{Q}$

or -

$B =$

asis

$\lambda = \chi_B$.

d. h. es gibt eine Matrix $T \in GL_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, so dass $D = TAT^{-1}$ erfüllt ist.

(ii) Sei V ein endl.-dim. K-Vektorraum. Man nennt $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$ diagonalisierbar, wenn eine geordnete Basis B von V existiert, so dass $M_B(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

Erinnerung: (i) Sei V ein endl.-dim. K-Vektorraum, B eine geordnete Basis und $\phi \in \mathrm{End}_K(V)$. Dann gilt:

$$\phi \text{ ist diagonalisierbar} \iff M_B(\phi) \text{ ist diagonalisierbar}$$

(iii) Def. $\lambda \in K$ **Eigenwert** von $A \in M_{n;K}$

$\Leftrightarrow \exists\, v \in K^n$ mit $v \neq 0_{K^n}$ und $Av = \lambda v$

(Laut Vl. sind die Nullstellen von χ_A genau die Eigenwerte der Matrix A.)

algebraische Vielfachheit $\mu_a(A,\lambda)$ eines Eigenwerts λ = Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_A

geometrische Vielfachheit $\mu_g(A,\lambda)$ = $\dim \mathrm{Eig}(A,\lambda)$, wobei $\mathrm{Eig}(A,\lambda)$ den Eigenraum von A zum Eigenwert λ bezeichnet, $\mathrm{Eig}(A,\lambda) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$ $= \ker(A - \lambda E_n)$

P

nu

bes

und

(üb

diag

je zw

ben

und B

mit B

B =
obwohl
Nachweis
unten).
onalisier-
Gleichheit
chkeit.
wird
nn Sie
matrix ist,

(iii) Für alle Eigenwerte λ von A gilt stets $1 \le \mu_g(A,\lambda) \le \mu_a(A,\lambda)$.

(iv) Diagonalisierbarkeitskriterium:
Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn χ_A in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt und $\mu_g(A,\lambda) = \mu_a(A,\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von A gilt.

(Besitzt χ_A nur einfache Nullstellen, dann ist die zweite Bed. wegen (iii) automatisch erfüllt.)

(c) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B über $\mathbb{C}$ ähnlich zueinander sind.

Wegen $\mathrm{char}(\mathbb{Q}) = 0$ ist jedes irreduzible

$M_{n,K}$

$v = \lambda v$

on χ_A ge-

A.)

$,\lambda)$ eines

ion λ als

$A,\lambda)$ =

$A,\lambda)$ den

ment λ be-

$| Av = \lambda v \}$

Polynom in $\mathbb{Q}[x]$ separabel und hat somit nur <u>einfache</u> komplexe Nullstellen. Somit besitzt auch χ_A nur einfache Nullstellen in $\mathbb{C}$, und daraus folgt lt. VL., dass A diagonalisierbar (über $\mathbb{C}$) ist. Wegen $\chi_A = \chi_B$ ist auch B diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Laut Vorlesung sind je zwei diagonalisierbare Matrizen mit demselben char. Pol. ähnlich zueinander. Also sind A und B ähnlich über $\mathbb{C}$, d.h. $\exists T \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $B = TAT^{-1}$.

$\square$

F23T2A1 (d)

Bestimmen Sie für den Endomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-2z \\ 0 \\ -2x+4z \end{pmatrix}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren.

Bestimme zunächst die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{E}}(\varphi)$ bzgl der Einheitsbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. $\varphi(e_1) = \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\chi(\varphi) = \det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x-4 \end{pmatrix} = x^3 - 5x^2 = x^2(x-5)$$

nal
oder
n sind
thogo-
n Eigen-
z. B. mit

nal zu-
ren.

Die Eigenwerte von φ sind die Nullstellen von $\chi(\varphi)$, also 0 und 5.

Bestimmung von $\mathrm{Eig}(\varphi, 0)$:

$$M_{\mathcal{E}}(\varphi) - 0\,E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix in normierter ZSF hat die Kennzahlen $r = 1$ und $j_1 = 1$. $\{1,2,3\} \setminus \{j_1\} = \{2,3\}$ $\Rightarrow$ Der Lösungsraum hat zwei Basisvektoren, nämlich $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, 0)$.

Bestimmung von $\mathrm{Eig}(\varphi, 5)$: $M_{\mathcal{E}}(\varphi) - 5\,E_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

normierte ZSF, Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$

$\{1,2,3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\} \Rightarrow$ ein Basisvektor, nämlich $b_3' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi, 5) \Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von φ

[Erinnerung: Eine ON-Basis des $\mathbb{R}^n$ ist eine geordnete Basis $(b_1, \dots, b_n)$ des $\mathbb{R}^n$ mit $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

ei

d.h. die Vektoren sind normiert und orthogonal zueinander. Ist A eine symmetrische Matrix oder φ ein selbstadjungierter Endomorphismus, dann sind die Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander. Es genügt deshalb, für jeden Eigenraum einzeln eine ON-Basis auszurechnen, z.B. mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.)

Die drei Basisvektoren sind bereits orthogonal zueinander. Deshalb genügt es, sie zu normieren.

$\|b_2\| = \sqrt{0^2+1^2+0^2} = 1$, definiere $\tilde{b}_2 = 1^{-1} \cdot b_2 = b_2$

$\|b_3\| = \sqrt{2^2+0^2+1^2} = \sqrt{5}$, setze $\tilde{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} b_3$

SF,
r=2
=2
nam-
Basis
ie
i,j ≤ n.

$\|b_3'\| = \sqrt{(-1/2)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$, setze $\tilde{b}_3' = \frac{2}{\sqrt{5}} b_3$ Insgesamt ist $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ eine ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von φ. $\square$