

bestimmte lineare Abbildung $\phi: V \rightarrow W$

F23T1A5 K Körper, $f: V \rightarrow W$
eine lin. Abb. zwischen K -Vektorräumen
 V, W , $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$, $W^* = \text{Hom}_K(W, K)$,
 $f^*: W^* \rightarrow V^*$, $\varphi \mapsto \varphi \circ f$ „duale lineare
Abbildung“ bereits erledigt:

- (a) f^* ist tatsächlich eine lineare Abb.
- (b) Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V
so ist f genau dann injektiv, wenn das
Tupel $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ linear unabh. ist.

Erinnerung LinAlg:

Ist V ein n -dim. K -Vektorraum ($n \in \mathbb{N}$, K Körper), $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V , W ein weiterer K -Vektorraum und $(w_1, \dots, w_n)$ ein Tupel von Vektoren $w_k \in W$ ($1 \leq k \leq n$), dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi: V \rightarrow W$ mit $\phi(v_k) = w_k$ für $1 \leq k \leq n$.

(c) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann
ist $f^*: W^* \rightarrow V^*$ surjektiv.

Sei $\psi \in V^*$. z.zg.: $\exists \varphi \in W^*$ mit $f^*(\varphi) = \psi$
(unter der Vor., dass f injektiv ist)

Nach Def. von f^* ist z.zg., dass ein $\varphi \in \text{Hom}(W, K)$
mit $\varphi \circ f = \psi$ Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete
Basis von V . Nach Teil (b) ist $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ ein
linear unabhängiges Tupel von Vektoren aus W .

Basis von V . Nach Teil (b) ist $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ ein

Auf Grund des Basisergänzungssatzes
gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und $w_1, \dots, w_m \in W$, so
dass $(f(v_1), \dots, f(v_n), w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete
Basis von W ist. (Es ist dann $\dim W = n + m$.)

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ beliebig gewählt. Auf
Grund der Basisergenschaft existiert eine
eindeutig bestimmte lineare Abb. $\varphi: W \rightarrow K$
mit $\varphi(f(v_k)) = \varphi(v_k)$ für $1 \leq k \leq n$ und
 $\varphi(w_l) = \alpha_l$ für $1 \leq l \leq m$.

Weil $(\psi \circ \varphi)(v_k) = \psi(v_k)$ für $1 \leq k \leq n$, und weil $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V ist, stimmen $\psi \circ \varphi$ und ψ überein.

(d) Zeigen Sie: Ist f^* surjektiv, dann ist f injektiv.

Ang., f^* ist surjektiv, aber f ist nicht injektiv. Dann gilt $\ker(f) \neq \{0_V\}$.

$\rightarrow \exists v \in V$ mit $v \neq 0_V$, $f(v) = 0$.

Voraussetzung $\rightarrow f^*: W^* \rightarrow V^*$ ist surjektiv

Zug
geordn
Basis

die z

Wegen $v \neq 0_V$ kann das ^{geordnete} n -elementige linear
 unabh. Tupel (v) zu einer Basis $(v, v_2, \dots, v_n)$ von
 V ergänzt werden. Auf Grund der Basiseigen-
 schaft existiert ein eindeutig bestimmtes Element ψ
 in $\text{Hom}_K(V, K) = V^*$ mit $\psi(v) = 1_K$, $\psi(v_j) = 0_K$ für
 $2 \leq j \leq n$. Auf Grund der Surjektivität von f^* existiert
 ein $\varphi \in W^*$ mit $\varphi \circ f = f^*(\varphi) = \psi$. Es gilt
 einerseits $\psi(v) = 1_K$, andererseits $\psi(v) = (\varphi \circ f)(v)$
 $\varphi(f(v)) = \varphi(0_W) = 0_K$ $\Downarrow$ da $1_K \neq 0_K$ $\square$
 $\uparrow \text{vector}(f)$

Übung: Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$
 V ein n -dim. K -Vektorraum und
 $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis.

Aus der linearen Algebra ist be-
kannt, dass eindeutig bestimmte
Elemente $v_1^*, \dots, v_n^*$ in $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$
existieren, so dass

$$v_k^*(v_l) = \delta_{kl} \text{ für } 1 \leq k, l \leq n$$

Zeigen Sie, dass $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine
geordn. Basis von V^* ist. Man nennt sie

die zu $(v_1, \dots, v_n)$ duale Basis.

Erinnerung: Sei K ein Körper, V, W endlich-dim. K -Vektorräume, $n = \dim V$, $m = \dim W$, $A = (v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und $B = (w_1, \dots, w_m)$ eine geordnete Basis von W .

- Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung als Linearkombination $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Der Vektor $\Phi_{\substack{A \\ v}}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ wird dann als Vektor der A -Koordinaten von v bezeichnet.

• Jeder Vektor $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung

• Ist $\phi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, dann gibt es eindeutig bestimmte Elemente $a_{ij} \in K$ mit $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ für $1 \leq j \leq n$.

Man nennt $M_B^A(\phi) = (a_{ij}) \in M_{m \times n, K}$ dann die Darstellungsmatrix von ϕ bzgl. A und B .

wichtige Eigenschaft:

$$\boxed{\Phi_B(\phi(v)) = M_B^A(\phi) \Phi_A(v)}$$

für alle $v \in V$.

- Ist $V = W$ (also ϕ ein Endomorphismus von V)
dann schreibt man statt $M_A^A(\phi)$ einfach $M_A(\phi)$.
- Ist $b: V \times V \rightarrow K$ eine Bilinearform auf V ,
dann nennt man die Matrix $M_A(b) = (a_{ij}) \in M_{n,K}$
mit den Einträgen $a_{ij} = b(v_i, v_j)$ ($1 \leq i, j \leq n$)
die Darstellungsmatrix von b bzgl. A .

wichtige Eigenschaft:

$$b(v, w) = {}^t \Phi_A(v) M_A(b) \Phi_A(w)$$

für alle $v, w \in V$.

Übung: Sei $\phi: V \rightarrow W$ eine lineare Abb.
zwischen endl.-dim. K -Vektorräumen V, W .
 A, B geordnete Basis von V bzw. W .
Sei A^* bzw. B^* die entsprechende duale
Basis von V^* bzw. W^* und $\phi^*: W^* \rightarrow V^*$ die
duale lineare Abbildung (siehe oben).

Zeigen Sie: $M_{A^*}^{B^*}(\phi^*) = {}^t M_B^A(\phi)$

H22T3A1

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung (d.h. $K \subseteq L$ ist Teilkörper von L , und L ist endl.-dim. K -Vektorraum). Für jedes $\alpha \in L$ sei m_α die lineare Abb. $L \rightarrow L$ geg. durch $x \mapsto \alpha x$ auf dem K -Vektorraum L . Weiter sei $\text{Tr}_{L/K}: L \rightarrow K$ die sog. Spurabbildung, die jedem $\alpha \in L$ die Spur $\text{Tr}(m_\alpha)$ von m_α zuordnet. Dabei ist die Spur einer linearen Abb. $\phi: L \rightarrow L$ die Spur einer Darstellungsmatrix A von

Abbildung $\alpha \mapsto$ die Spur $\text{Tr}_K(L)$
 ϕ bzgl einer beliebigen geordneten Basis
von L , also die Summe der Diagonaleinträge
von A . Zeigen Sie:

(a) $\text{Tr}_{L/K} : L \rightarrow K$ ist eine lineare Abbildung

Nach Definition ist $\text{Tr}_{L/K}$ die Komposi-
tion der folgenden drei Abbildungen:

- $L \rightarrow \text{End}_K(L)$, $\alpha \mapsto m_\alpha$

- $\text{End}_K(L) \rightarrow M_{n,K}$, $\phi \mapsto M_A(\phi)$,
wobei A eine bel. geordnete Basis des K -
Vektorraums L bezeichnet

- $\text{Tr} : M_{n,K} \rightarrow K$, $(a_{ij}) \mapsto \sum_{k=1}^n a_{kk}$

Es genügt z.zg., dass alle drei Abbildungen linear sind, denn die Komposition linearer Abb. ist wiederum linear.

erste Abbildung: Seien $\alpha, \beta \in L$ und $a \in K$. Zu überprüfen:

$$m_{\alpha+\beta} = m_{\alpha} + m_{\beta} \quad m_{a \cdot \alpha} = a \cdot m_{\alpha}$$

Sei $x \in L$. Dann gilt

$$\begin{aligned} m_{\alpha+\beta}(x) &= (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \\ &= m_{\alpha}(x) + m_{\beta}(x) = (m_{\alpha} + m_{\beta})(x) \end{aligned}$$

$$m_{a \cdot \alpha}(x) = (a \cdot \alpha)x = a(\alpha x) =$$

$$a \cdot m_{\alpha}(x) = (a \cdot m_{\alpha})(x)$$

Basis
Abträge

Abbildung
komposi-
gen

φ des K -

$\sum_{k=1}^n a_{kk}$

• Laut Vorlesung ist $\text{End}_K(L) \rightarrow M_{n,K}$
 $\phi \mapsto M_\phi(\phi)$ ein Isomorphismus von
 K -Vektorräumen, insb. linear.

• Seien $A, B \in M_{n,K}$ und $a \in K$.

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Dann gilt

$A+B = (a_{ij} + b_{ij})$ und somit

$$\text{Tr}(A+B) = \sum_{k=1}^n (a_{kk} + b_{kk}) = \sum_{k=1}^n a_{kk} + \sum_{k=1}^n b_{kk} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \text{ und}$$

$$a \cdot A = (a a_{ij}), \text{ also } \text{Tr}(a \cdot A) = \sum_{k=1}^n a a_{kk} = a \sum_{k=1}^n a_{kk} = a \text{Tr}(A).$$