

Lineare Algebra

F23 T3 A2 Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = M_{n, \mathbb{R}}$ der
 $\mathbb{R}$ -Vektorraum der $(n \times n)$ -Matrizen über
 $\mathbb{R}$, $U = \{A \in V \mid {}^t A = A\}$
(symmetrische Matrizen) und $W =$
 $\{A \in V \mid {}^t A = -A\}$ (antisymmetrische
Matrizen).

(a)

B

zu

(ii)

zu li

(a) Zeigen Sie, dass U und W Untervektorräume von V sind.

Beh. U ist Untervektorraum von V
zu überprüfen: (i) $0_V \in U$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R} \forall A, B \in U: A+B, \lambda A \in U$

zu (i) ist erfüllt, weil der Nullvektor in V die Nullmatrix ist, und die Nullmatrix die Gleichung
 $0_{m,n,\mathbb{R}} = 0_{m,n,\mathbb{R}}$ erfüllt

zu (ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A, B \in U$.

z.zg. ${}^t(A+B) = A+B, {}^t(\lambda A) = \lambda A$

$$A \in U \Rightarrow {}^tA = A \quad B \in U \Rightarrow {}^tB = B$$

Aus der Vorlesung sind die Rechenregeln

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \text{ und } {}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA \text{ f\"ur}$$

die Transponierte bekannt. Insgesamt gilt also

$${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB = A+B \text{ und ebenso}$$

$${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA = \lambda A.$$

Beh.: W ist Untervektorraum von V

Seien $A, B \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. z.zg.:

(i) $0_V \in W$ (ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A, B \in W: A+B, \lambda A \in W$

zu (i) Es gilt ${}^t 0_V = 0_V = -0_V \Rightarrow 0_V \in W$

zu (ii) Seien $\lambda \in \mathbb{R}, A, B \in W$. z.zg.:

$${}^t(A+B) = -(A+B), \quad {}^t(\lambda A) = -(\lambda A)$$

$$A \in W \Rightarrow {}^t A = -A \quad B \in W \Rightarrow {}^t B = -B$$

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } {}^t(A+B) &= {}^t A + {}^t B = (-A) + (-B) \\ &= -(A+B) \text{ und } {}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A = \lambda(-A) = -(\lambda A) \end{aligned}$$

(b) zeigen Sie: $V = U \oplus W$ (direkte Summe)

zu überprüfen: (i) $U \cap W = \{0_V\}$ (ii) $U + W = V$

zu (i) „ $\supseteq$ “ klar, da $U \cap W$ ein Untervektorraum von V ist und somit den Nullvektor 0_V enthält.

„ $\subseteq$ “ Sei $A \in U \cap W$, z.zg.: $A = 0_V$

$$A \in U \Rightarrow {}^t A = A, \quad A \in W \Rightarrow {}^t A = -A$$

$$\rightarrow -A = A \Rightarrow 2A = 0_{M_{n,\mathbb{R}}} \Rightarrow A = \frac{1}{2}(2A)$$

$$= \frac{1}{2} 0_{M_{n,\mathbb{R}}} = 0_{M_{n,\mathbb{R}}}$$

zu (ii) Nach Def. ist $U+W = \{u+w \mid u \in U, w \in W\}$

" $\subseteq$ " klar, da die Summe zweier Unterräume von V lt. II. ein Untervektorraum von V ist.

" $\supseteq$ " Sei $A \in V$. z.zg. $\exists B \in U, C \in W$

mit $A = B + C$. Setze $B = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$

$C = \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. Es gilt ${}^t B =$

$$\frac{1}{2}({}^t(A + {}^t A)) = \frac{1}{2}({}^t A + {}^t({}^t A)) = \frac{1}{2}(A + {}^t A)$$

$$= B \rightarrow B \in U$$

$$\begin{aligned}
 \text{ebenso: } {}^t C &= {}^t \left(\frac{1}{2} (A - {}^t A) \right) = \frac{1}{2} ({}^t (A - {}^t A)) \\
 &= \frac{1}{2} ({}^t A - {}^t ({}^t A)) = \frac{1}{2} ({}^t A - A) = -\frac{1}{2} (A - {}^t A) \\
 &= -C \Rightarrow C \in W \quad \text{außerdem: } B + C = \\
 &\frac{1}{2} (A + {}^t A) + \frac{1}{2} (A - {}^t A) = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} {}^t A - \frac{1}{2} {}^t A \\
 &= A \quad \square
 \end{aligned}$$

Übung: Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $A^2 = E_n$ wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\mathbb{R}^n = \text{Eig}(A, 1) \oplus \text{Eig}(A, -1).$$

F23T1A5 Sei K ein Körper. Seien

V, W endl.-dim. K -Vektorräume und

$f: V \rightarrow W$ eine lineare Abb. Weiter sei

$$V^* = \text{Hom}_K(V, K), \quad W^* = \text{Hom}_K(W, K)$$

und es sei $f^*: W^* \rightarrow V^*$ definiert

durch $\varphi \mapsto \varphi \circ f$.

(Erinnerung: $\text{Hom}_K(V, W)$ = Menge der linearen Abbildungen $V \rightarrow W$, ist ein K -Vektorraum.)

(a) Zeigen Sie, dass f^* eine lineare Abbildung ist.

Seien $\varphi, \psi \in W^*$ und $\lambda \in K$ zu überprüfen: $f^*(\varphi + \psi) = f^*(\varphi) + f^*(\psi)$
und $f^*(\lambda \varphi) = \lambda f^*(\varphi)$ Sei $v \in V$.

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt } f^*(\varphi + \psi)(v) &= ((\varphi + \psi) \circ f)(v) \\ &= (\varphi + \psi)(f(v)) = \varphi(f(v)) + \psi(f(v)) \\ &= (\varphi \circ f)(v) + (\psi \circ f)(v) = f^*(\varphi)(v) + f^*(\psi)(v) \end{aligned}$$

$$= (f^*(\varphi) + f^*(\psi))(v), \text{ ebenso}$$

$$f^*(\lambda \varphi)(v) = (\lambda \varphi \circ f)(v) = (\lambda \varphi)(f(v)) =$$

$$\lambda \cdot \varphi(f(v)) = \lambda \cdot (\varphi \circ f)(v) = \lambda \cdot f^*(\varphi)(v)$$

$$= (\lambda f^*(\varphi))(v)$$

(8) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , wobei $n = \dim V$

ist. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn

$(f(v_1), \dots, f(v_n))$ linear unabhängig ist.

" $\Rightarrow$ " Vor: f ist injektiv, z.zg.: $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ ist

linear unabhängig. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$

mit $\sum_{k=1}^n \lambda_k f(v_k) = 0_W$ z.zg.: $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$

Da f linear ist, gilt $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k v_k)$

$$= \sum_{k=1}^n \lambda_k f(v_k) = 0_W = f(0_V) \xrightarrow{f \text{ inj.}} \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$$

$= 0_V$ Da $(v_1, \dots, v_n)$ als Basis vstb. linear unabh.

ist, folgt $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$.