Aufgabe H11T1A1

Sei p eine Primzahl und S_p die symmetrische Gruppe in p Elementen.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der p-Sylowgruppen in S_p gleich $(p-2)!$ ist.

(c) Folgern Sie aus (b) die Kongruenz $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

Lösung:

zu (a) Ein Element in S_p ist genau dann von Ordnung p, wenn der kgV der Zykellängen gleich p ist. Dies ist nur für die p-Zykel erfüllt, also sind dies die Elemente der Ordnung p in S_p. Allgemein ist für alle $n, k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der k-Zykel in S_n gleich $(k-1)!\binom{n}{k}$, also ist die Anzahl der p-Zykel in S_p gleich $(p-1)!\binom{p}{p} = (p-1)!$.

zu (b) Wegen $p \mid p!$ und $p^2 \nmid p!$ sind die p-Sylowgruppen in S_p genau die Untergruppen der Ordnung p. Jede Untergruppe der Ordnung p enthält genau $\varphi(p) = p - 1$ Elemente der Ordnung p, und ist jedes Element $\sigma \in S_p$ der Ordnung p in genau einer Untergruppe der Ordnung p enthalten, nämlich in $\langle\sigma\rangle$. Ist also s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen in S_p und a_p die Anzahl der Elemente der Ordnung p, dann gilt $a_p = (p-1)s_p$. Es folgt $s_p = \frac{a_p}{p-1} = \frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$.

zu (c) Nach den Sylowsätzen gilt $s_p \equiv 1 \bmod p$ für die Anzahl der p-Sylowgruppen. Mit Aufgabenteil p erhalten wir also $(p-2)! \equiv 1 \bmod p$. Multiplizieren wir beide Seiten der Kongruenz mit $p-1$, dann folgt $(p-1)! \equiv p-1 \equiv -1 \bmod p$.