Aufgabe (Punkte)

Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ mit $p \leq n < p^2$. Zeigen Sie, dass jede p-Sylowgruppe in S_n abelsch ist.

Lösung:

Sei $a = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. Dann gilt $ap \leq n < (a+1)p$, und der Primfaktor p kommt in der Primfaktorzerlegung genau a-mal vor. Folglich ist jede p-Sylowgruppe in S_n von Ordnung p^a. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass je zwei p-Sylowgruppen in einer Gruppe zueinander konjugiert und damit insbesondere isomorph sind. Es genügt also, eine p-Sylowgruppe in S_n anzugeben und zu überprüfen, dass sie abelsch ist. Dazu definieren wir die Elemente

$$\tau_1 = (1 \;...\; p) \quad , \quad \tau_2 = (p+1 \;...\; 2p) \quad ... \quad \tau_a = ((a-1)p+1 \;...\; ap)$$

und $G = \langle \tau_1, ..., \tau_a \rangle$. Die Träger der Elemente $\tau_1, ..., \tau_a$ sind paarweise zueinander disjunkt, deshalb gilt $\tau_i \circ \tau_j = \tau_j \circ \tau_i$ für alle $i, j \in \{1, ..., a\}$. Der Zentralisator $C_G(\tau_i)$ jedes Elements τ_i enthält also das gesamte Erzeugendensystem $\tau_1, ..., \tau_a$, damit die gesamte Untergruppe G. Also liegt jedes τ_i im Zentrum $Z(G)$. Wegen $G = \langle \tau_1, ..., \tau_a \rangle$ folgt $G = Z(G)$, d.h. die Gruppe G ist abelsch. Jede Untergruppe $\langle \tau_i \rangle$ ist zyklisch von Ordnung p. Weil die Träger von τ_i und τ_j für $i \neq j$ disjunkt sind, ist der Durchschnitt von $U_i = \langle \tau_i \rangle$ mit $V_i = \langle \tau_1, ..., \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, ..., \tau_a \rangle$ jeweils trivial. Daraus folgt, dass G ein direktes Produkt von $U_1, ..., U_a$ ist und somit $|G| = |U_1| \cdot ... \cdot |U_a| = p^a$ gilt. Also ist G tatsächlich eine abelsche p-Sylowgruppe von S_n.