Aufgabe H04T1A1

Geben Sie je eine 2-Sylowgruppe an in den Gruppen

(a) S_4 (b) A_5 (c) A_6.

Lösung:

zu (a) Wegen $|S_4| = 24 = 2^3 \cdot 3$ ist jede 2-Sylowgruppe in S_4 von Ordnung 8. Eine solche Untergruppe ist die Diedergruppe $D_4 = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\rangle$, die laut Vorlesung aus $2 \cdot 4 = 8$ Elementen besteht.

zu (b) Die Ordnung der Gruppe A_5 ist $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, folglich besteht besteht jede 4-Sylowgruppe in A_5 aus vier Elementen. Eine solche Untergruppe ist beispielsweise die Kleinsche Vierergruppe $V_4 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

zu (c) Wegen $|A_6| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ besteht jede 2-Sylowgruppe in A_6 aus 8 Elementen. Es wird sich zeigrn, dass in A_6 eine 2-Sylowgruppe gefunden werden kann, die der Kleinschen Vierergruppe recht ähnlich sieht. Sei $\rho = (1\ 2)(3\ 4)$, $\sigma = (1\ 3)(2\ 4)$, $\tau = (1\ 2)(5\ 6)$, $V = \langle \rho, \sigma\rangle$ und $G = \langle \rho, \sigma, \tau\rangle$. Die Gruppe V ist isomorph zur Kleinschen Untergruppe V_4 und somit vierelementig. Wegen $\mathrm{ord}(\tau) = 2$ besteht $U = \langle \tau \rangle$ aus zwei Elementen. Wir zeigen nun, dass G das semidirekte Produkt von U und V ist. Daraus folgt dann $|G| = |U| \cdot |V| = 4 \cdot 2 = 8$, und G ist somit eine 2-Sylowgruppe von A_6.

Man überprüft unmittelbar, dass $\tau\rho\tau^{-1} = \rho \in V$ und $\tau\sigma\tau^{-1} = \rho\sigma \in V$ gilt. Somit liegt τ im Normalisator $N_G(V)$. Wegen $\rho, \sigma \in V$ sind auch diese beiden Elemente in $N_G(V)$ enthalten. Insgesamt erhalten wir also $G = \langle \rho, \sigma, \tau\rangle = N_G(V)$ und somit $V \trianglelefteq G$. Das Komplexprodukt VU ist damit eine Untergruppe von A_6, und wegen $\rho, \sigma, \tau \in VU$ stimmt es mit G überein. Außerdem gilt $\tau \notin V$ und somit $V \cap \langle \tau \rangle = \{\mathrm{id}\}$. Also handelt es sich bei G tatsächlich um das semidirekte Produkt von U und V.