Aufgabe F10T3A3

Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so das S_n eine Untergruppe vom Index 3 besitzt.

Lösung:

Nehmen wir an, dass es in S_n eine Untergruppe U mit $(S_n : U) = 3$ gibt. Die Operation von S_n auf der Menge S_n/U der Linksnebenklassen ist transitiv, weil je zwei Nebenklassen σU und τU durch $(\tau\sigma^{-1}) \cdot (\sigma U) = \tau U$ ineinander überführt werden können. Die Operation liefert außerdem einen Homomorphismus $\hat{\varphi} : S_n \to S_3$, der folgendermaßen zu Stande kommt: Zunächst erhält man einen Homomorphismus $\psi : S_n \to \mathrm{Per}(S_n/U)$ durch $\psi(\sigma)(\tau U) = (\sigma\tau)U$ für $\sigma, \tau \in U$. Anschließend wählt man eine Bijektion $\phi : G/U \to M_3$ und definiert einen Isomorphismus $\hat{\phi} : \mathrm{Per}(G/U) \to S_3$ durch $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. Der Homomorphismus $\hat{\varphi}$ ist dann durch $S_n \to S_3$ gegeben. Er kann zu einem Homomorphismus $\varphi : A_n \to S_3$ eingeschränkt werden.

Betrachten wir zunächst den Fall $n \geq 5$. Wegen $|A_n| \geq |A_5| \geq 60$ und $|S_3| = 6$ kann φ nicht injektiv sein. Weil A_5 laut Vorlesung eine einfache Gruppe ist, muss also $\ker(\varphi) = A_n$ gelten. Dies bedeutet $\psi(\sigma) = \mathrm{id}_{S_n/U}$ und somit $\sigma \cdot U = \psi(\sigma)(U) = \mathrm{id}_{S_n/U}(U) = U$ für alle $\sigma \in A_n$. Betrachten wir die Operation von S_n auf S_n/U, so bedeutet dies, dass die Gruppe A_n in der Stabilisatorgruppe $(S_n)_U$ enthalten ist. Für die Bahnlänge des Elements U in S_n/U folgt daraus $|S_n(U)| = (S_n : (S_n)_U) \leq (S_n : A_n) = 2$. Dies widerspricht der Feststellung von oben, dass S_n auf S_n/U transitiv operiert, die Bahnlänge also gleich 3 ist.

Wenn S_n eine Untergruppe vom Index 3 besitzt, muss also $n \leq 4$ gelten. Für $n \in \{1, 2\}$ kann es wegen $|S_1|, |S_2| < 3$ eine solche Untergruppe nicht geben. In S_3 gibt es Untergruppen vom Index 3, zum Beispiel die Untergruppe $\langle(1\ 2)\rangle$. In S_4 ist die achtelementige Diedergruppe $D_4 = \langle(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\rangle$ eine Untergruppe vom Index 3. Die einzigen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass S_n eine Untergruppe vom Index 3 besitzt, sind also 3 und 4.