Aufgabe F09T2A1

(a) Wieviele Untergruppen in $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

(b) Bestimmen Sie die Anzahl der 5- und der 3-Sylowgruppen in S_5.

Lösung:

zu (a) Die Gruppe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist zyklisch von Ordnung 4, und jede zyklische Gruppe der Ordnung 4 enthält genau $\varphi(4) = 2$ Elemente der Ordnung 4. Umgekehrt ist jedes Element $g \in S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ der Ordnung 4 in genau einer Untergruppe der Ordnung 4 enthalten, nämlich in $\langle g \rangle$. Es genügt also, die Anzahl der Elemente der Ordnung 4 in $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ zu bestimmen und deren Anzahl durch 2 zu teilen. Ein Element $(\sigma, \bar{a})$ hat genau dann Ordnung 4, wenn der kgV von $\mathrm{ord}(\sigma)$ und von $\mathrm{ord}(\bar{a})$ gleich 4 ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn $\mathrm{ord}(\bar{a}) = 4$ und $\mathrm{ord}(\sigma) \in \{1, 2\}$ ist. In S_3 gibt es genau vier Elemente der Ordnung 1 oder 2 (das Neutralelement und die Transpositionen), und in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sind $\bar{1}, \bar{3}$ die einzigen Elemente der Ordnung 4. Also gibt es in $S_3 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Elemente der Ordnung 4, und damit vier zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ isomorphe Untergruppen.

zu (b) Jede 5-Sylowgruppe in S_5 ist (wegen $5 \mid 5!$ und $5^2 \nmid 5!$) zyklisch von Ordnung 5 und enthält damit $\varphi(5) = 4$ Elemente der Ordnung 5. Umgekehrt ist jedes Element σ der Ordnung 5 in genau einer 5-Sylowgruppe enthalten, nämlich in der von σ erzeugten Untergruppe. Bezeichnet a_5 die Anzahl der Elemente der Ordnung 5 und s_5 die Anzahl der 5-Sylowgruppen, dann gibt also $a_5 = 4s_5$. Die Elemente der Ordnung 5 in S_5 sind genau die 5-Zykel. Allgemein ist die Anzahl der k-Zykel in S_n gleich $(k-1)!\binom{n}{k}$. Die Anzahl a_5 der 5-Zykel beträgt also $4! = 24$, und die Anzahl der 5-Sylowgruppen ist $s_5 = \frac{1}{4}a_5 = 6$.

Jede 3-Sylowgruppe in S_5 ist zyklisch von Ordnung 3 und enthält $\varphi(3) = 2$ Elemente der Ordnung 3. Umgekehrt ist jedes Element σ der Ordnung 3 in genau einer 3-Sylowgruppe enthalten, nämlich in der von σ erzeugten Untergruppe. Es gibt also doppelt so viele Elemente der Ordnung 3 in S_5, wie es 3-Sylowgruppen gibt. Die Elemente der Ordnung 3 in S_5 sind genau die 3-Zykel, von denen es in S_5 genau $2!\binom{5}{3} = 2 \cdot 10 = 20$ Stück gibt. Also existieren in S_5 genau zehn 3-Sylowgruppen.