Aufgabe F08T2A1

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n-1$. Sei G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n, die eine k-elementige Teilmenge A von $M_n = \{1, ..., n\}$ invariant lässt. Zeigen Sie, dass dann $(S_n : G) \geq \binom{n}{k}$ gilt.

Lösung:

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der k-elementigen Teilmengen von M_n. Dann operiert die Gruppe S_n auf $\mathcal{M}$ durch $\sigma \cdot A = \sigma(A)$ für $\sigma \in S_n$ und $A \in \mathcal{M}$. Die Operation ist transitiv, es gibt also nur eine Bahn der Länge $|\mathcal{M}| = \binom{n}{k}$. Seien nämlich $A, B \in \mathcal{M}$ beliebig vorgegeben mit $A = \{x_1, ..., x_k\}$ und $B = \{y_1, ..., y_k\}$. Wir wählen $x_{k+1}, ..., x_n$ und $y_{k+1}, ..., y_n$ so, dass $M_n = \{x_1, ..., x_n\} = \{y_1, ..., y_n\}$ gilt und definieren dann eine Bijektion $\sigma \in S_n$ durch $\sigma(x_i) = y_i$ für $1 \leq i \leq n$. Nach Konstruktion gilt $\sigma \cdot A = \sigma(A) = B$.

Sei nun $A \in \mathcal{M}$. Weil die Länge der Bahn $S_n(A)$ gleich $\binom{n}{k}$ ist, hat der Stabilisator $(S_n)_A$ auf Grund der allgemeinen Gleichung $(S_n : (S_n)_A) = |S_n(A)|$ die Ordnung $|S_n|/|S_n(A)| = (n!)/\binom{n}{k}$. Die Gruppe G aus der Aufgabenstellung ist nach Definition in $(S_n)_A$ enthalten. Es folgt $|G| \leq |(S_n)_A| \leq (n!)/\binom{n}{k}$ und somit

$$(S_n : G) \quad \geq \quad \frac{n!}{(n!)/\binom{n}{k}} \quad = \quad \binom{n}{k}.$$