Aufgabe F06T2A1

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und U, V Untergruppen. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) Die Gruppe G ist direkte Summe von U und V.

(ii) Für alle $a, b \in G$ haben die Nebenklassen $a+U$ und $b+V$ jeweils genau ein gemeinsames Element.

Lösung:

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" zur Erinnerung: Eine abelsche Gruppe G ist direkte Summe seiner Untergruppen U und V, wenn die Bedingungen $U \cap V = \{0_G\}$ und $G = U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ erfüllt sind. Zunächst beweisen wir unter der Voraussetzung (ii) die Gleichung $U \cap V = \{0_G\}$. Hier verwenden wir die Voraussetzung, dass der Durchschnitt der Nebenklassen $0_G + U$ und $0_G + V$ einelementig ist. Da 0_G (wegen $0_G \in U$ und $0_G in V$) in beiden Nebenklassen enthalten ist, muss

$$U \cap V \quad = \quad (0_G + U) \cap (0_G + V) \quad = \quad \{0_G\} \quad \text{gelten.}$$

Beweisen wir nun die Gleichung $G = U + V$. Die Inklusion „$\supseteq$" ist offensichtlich, weil U und V beides Untergruppen von G sind. Zum Nachweis von „$\subseteq$" sei $g \in G$ vorgegeben. Nach Voraussetzung enthält der Durchschnitt $g{+}U{\cap}V$ ein Element v, es gilt also $v = g{+}u$ für ein $u \in U$. Damit folgt $g = (-u){+}v \in U{+}V$.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Seien $a+U$ und $b+V$ zwei vorgegebene Nebenklassen, mit $a, b \in G$. Wegen $U+V = G$ gibt es Elemente $u \in U$ und $v \in V$ mit $(-u) + v = a - b$. Es folgt $a + u = b + v \in (a+U) \cap (b+V)$. Nehmen wir nun an, das Element $g \in G$ ist im Durchschnitt $(a+U) \cap (b+V)$ enthalten, also $g = a + u' = b + v'$ mit $u' \in U$, $v' \in V$. Dann folgt $u' - v' = b - a = u - v$, also $u' - u = v - v'$ und wegen $U \cap V = \{0_G\}$ somit $u = u'$ und $v = v'$. Dies wiederum gedeutet $g' = a + u = b + v$, und wir haben somit gezeigt, dass die Schnittmenge $(a+U) \cap (b+V)$ genau einelementig ist.