

### Aufgabe F02T3A2

Sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $U \subseteq G$  eine Untergruppe vom Index  $n$ . Die Operation von  $G$  auf der Menge  $G/U$  der Linksnebenklassen definiert einen Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow S_n$ . (Das braucht nicht gezeigt werden.)

- (a) Zeigen Sie, dass  $\ker(\varphi) \subseteq U$  gilt.
- (b) Setzen wir nun  $(G : U) = p$  voraus, wobei  $p$  der kleinste Primteiler von  $|G|$  ist. Beweisen Sie, dass  $U$  dann ein Normalteiler von  $G$  ist.

*Lösung:*

zu (a) Laut Vorlesung wird der Homomorphismus  $\varphi$  folgendermaßen konstruiert: Zunächst definiert man einen Homomorphismus  $\psi : G \rightarrow \text{Per}(G/U)$  durch  $\psi(g)(hU) = (gh)U$  für  $g, h \in U$ . Anschließend wählt man eine beliebige Bijektion  $\phi : G/U \rightarrow M_n$  (wobei  $M_n = \{1, \dots, n\}$  ist) und definiert einen Isomorphismus  $\hat{\phi} : \text{Per}(G/U) \rightarrow S_n$  durch  $\sigma \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ . Der Homomorphismus  $\varphi$  ist dann durch  $\varphi = \hat{\phi} \circ \psi$  gegeben. Ist nun  $a \in \ker(\varphi)$ , dann folgt aus  $\hat{\phi} \circ \psi = \varphi$  und der Isomorphismus-Eigenschaft von  $\hat{\phi}$ , dass  $a$  auch in  $\ker(\psi)$  gilt. Es gilt also  $\psi(a) = \text{id}_{G/U}$  und somit  $(ah)U = \psi(a)(hU) = \text{id}_{G/U}(hU) = hU$  für alle  $h \in G$ . Insbesondere gilt  $aU = U$  und somit  $a \in U$ .

zu (b) Weil Kerne von Homomorphismen Normalteiler sind, genügt es,  $U = \ker(\varphi)$  zu beweisen. Angenommen, diese Gleichung ist nicht erfüllt. Nach Teil (a) muss dann  $\ker(\varphi) \subsetneq U$  gelten. Nach dem Satz von Lagrange gilt

$$|G| = (G : \ker(\varphi))|\ker(\varphi)| = (G : U)|U|.$$

Es folgt

$$(G : \ker(\varphi)) = (G : U) \frac{|U|}{|\ker(\varphi)|} = (G : U)(U : \ker(\varphi)) = p \cdot (U : \ker(\varphi)).$$

Weil jeder Primteiler von  $(U : \ker(\varphi))$  auch ein Primteiler von  $|G|$  ist, gilt einerseits auf Grund der Voraussetzung an  $p$  die Ungleichung  $q \geq p$  für alle Primteiler  $q$  von  $(U : \ker(\varphi))$ . Andererseits ist nach dem Homomorphiesatz für Gruppen die Faktorgruppe  $G/\ker(\varphi)$  isomorph zu einer Untergruppe von  $S_p$ , also ist  $(G : \ker(\varphi))$  ein Teiler von  $|S_p| = p!$ . Weil der Primfaktor  $p$  in der Primfaktorzerlegung von  $p!$  nur einfach vorkommt, und alle anderen Primteiler kleiner sind, gilt dasselbe für die Primfaktoren von  $(G : \ker(\varphi))$ . Wegen  $(G : \ker(\varphi)) = p \cdot (U : \ker(\varphi))$  ist deshalb die Ungleichung  $q < p$  für alle Primteiler  $q$  von  $(U : \ker(\varphi))$  erfüllt. Dies widerspricht der zuvor getroffenen Feststellung.