## Lösung linearer DGLs mit konstanten Koeffizienten

**Satz (3.8)**

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{C}}$, eine $\mathbb{C}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}^n$. Die Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, $t \mapsto e^{\lambda t} v$ ist genau dann eine Lösung des Systems $y' = Ay$ ungleich null, wenn $v$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist.

(ii) Ist $(\lambda_1, ..., \lambda_r)$ ein Tupel komplexer Zahlen und $(v_1, ..., v_r)$ ein Tupel von Vektoren, wobei $v_j$ jeweils ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j$ bezeichnet, so ist das Tupel $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ von Funktionen $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ genau dann linear unabhängig, wenn das Tupel $(v_1, ..., v_r)$ linear unabhängig ist.

(iii) Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die komplexen Zahlen $\lambda_j$ alle verschieden sind.

## Basiswechsel im Lösungsraum eines linearen Systems

**Proposition (3.9)**

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{C}}$, $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $B = TAT^{-1}$. Genau dann ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ eine Lösung des Systems $y' = Ay$, wenn $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch $\psi(t) = T\varphi(t)$ eine Lösung von $z' = Bz$ ist.

Beweis von Prop. 39

geg: zwei Systeme $(*_1)$ $y' = Ay$

$(*_2)$ $z' = Bz$, $T \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $B = TAT^{-1}$

<u>Beh</u>: $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ Lsg von $(*_1)$

$\Rightarrow \psi(t) = T\varphi(t)$ Lsg von $(*_2)$

$$\psi'(t) = T\varphi'(t) = TA\varphi(t) = TAT^{-1}T\varphi(t)$$

$$= BT\varphi(t) = B\psi(t) \qquad \square$$

$$\psi'(t) = T\varphi'(t) = TA\varphi(t) = TAT^{-1}T\varphi(t)$$
$$= BT\varphi(t) = B\psi(t) \qquad \square$$

Beispiel

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_3 \\ y_3' &= 4y_1 - 2y_2 - y_3 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow y' = Ay \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A = x^3 + x - 2 = (x-1)(x^2+x+2) = (x-1)(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}, \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\sqrt{7}$$

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \ker(A-E) = \ker\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{Gauß}}{=}$$

$$\ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} x_3$$
$$x_2 = 0$$

analog: $\mathrm{Eig}\left(A, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{7}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 3+i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\mathrm{Eig}\left(A, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{7}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 3+i\sqrt{7} & 3-i\sqrt{7} \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$D = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+i\sqrt{7} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}-i\sqrt{7} \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem von $y' = Dy$

$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ mit $\varphi_1(t) = e^t e_1$,

$\varphi_2(t) = e^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} e_2$, $\varphi_3(t) = e^{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} e_3$

Beweis v

geg. $\lambda$

$v = u$

Prop. 13.

von $y' =$

Mit $\lambda$ ist

und nach

Eigenvekt

ist Lsg

Mit $\varphi$ un

$\Rightarrow$ Prop 3.9 $\Rightarrow$ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ m.A

$$\varphi_1(t) = T\psi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = T\psi_2(t)$$

$$= e^{(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3+i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = e^{(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{7})t} \begin{pmatrix} 3-i\sqrt{7} \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ist Fundamentalsystem für $y' = Ay$ $\square$

## Lösungsräume reeller Systeme

### Proposition (3.10)

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$, eine $\mathbb{R}$-wertige $n \times n$-Matrix.

(i) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $A$, $\lambda = \nu + i\omega$ mit $\nu, \omega \in \mathbb{R}$, und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, $v = u + iw$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ ein Eigenwert von $A$, und $\bar{v} = u - iw$ ist ein zugehöriger Eigenvektor.

(ii) In diesem Fall sind $\psi, \xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)u - \sin(\omega t)w)$$

und

$$\xi(t) = e^{\nu t}(\sin(\omega t)u + \cos(\omega t)w)$$

zwei linear unabhängige Lösungen der DGL.

## Beweis von Prop. 3.10 (ii)

geg. $\lambda = \nu + i\omega$ Eigenwert von $A$

$v = u + iw$ zugehöriger Eigenvektor

Prop. (3.8) $\Rightarrow$ $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ ist Lösung von $y' = Ay$

Mit $\lambda$ ist auch $\bar{\lambda} = \nu - i\omega$ Eigenwert von $A$, und nach (i) ist $\bar{v} = u - iw$ ein zugeh. Eigenvektor $\Rightarrow$ Auch $\bar{\varphi}(t) = e^{\bar{\lambda} t}$ ist Lsg von $y' = Ay$.

Mit $\varphi$ und $\bar{\varphi}$ sind auch folgende Fkt

Lösungen:

$$\psi(t) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(t) + \bar{\varphi}(t)\right) =$$

$$\tfrac{1}{2} e^{\lambda t} v + \tfrac{1}{2} e^{\bar{\lambda} t} \bar{v} =$$

$$\tfrac{1}{2} e^{(\nu + i\omega)t} (u + iw) + \tfrac{1}{2} e^{(\nu - i\omega)t} (u - iw)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{\nu} \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right)(u + iw)$$

$$+ \tfrac{1}{2} e^{\nu} \left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\right)(u - iw)$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{\nu} \Big(\cos(\omega t) u + \cancel{i \sin(\omega t) u} + \cancel{i \cos(\omega t) w}$$

$$- \sin(\omega t) w + \cos(\omega t) u - \cancel{i \sin(\omega t) u}$$

$$- \cancel{i \cos(\omega t) w} - \sin(\omega t) w \Big) =$$

$$= e^{\nu} \left(\cos(\omega t) u - \sin(\omega t) w\right)$$

$$\xi(t) = \frac{1}{2i}\left(\varphi(t) - \bar{\varphi}(t)\right) = \ldots = e^{\nu t}\left(\sin(\omega t)\, u + \cos(\omega t)\, w\right)$$

Die Matrix des Basiswechsels von $(\varphi, \bar{\varphi})$ zu $(\psi, \xi)$ ist geg durch $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$, ist invertierbar auf Grund der Det. $\frac{1}{4}(2i) = \frac{1}{2}i \neq 0$ $\Rightarrow$ mit $(\varphi, \bar{\varphi})$ ist auch das Paar $(\psi, \xi)$ linear unabh. $\square$

Anwendung von Prop 3.10.

Auch das Tupel $(\varphi_1, \psi, \xi)$ mit

$$\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) - \sqrt{7}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 4\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 8\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \end{pmatrix}$$

$$\xi(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} 3\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) + \sqrt{7}\cos(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 4\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \\ 8\sin(\frac{1}{2}\sqrt{7}\,t) \end{pmatrix}$$

ist ein Fundamentalsystem für $y' = Ay$. $\square$

## Reelle Fundamentalsysteme

### Folgerung (3.11)

Ist $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{R}}$ eine diagonalisierbare $n \times n$-Matrix, mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_p$ und Paaren $(\lambda_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+1}), ..., (\lambda_{p+q}, \bar{\lambda}_{p+q})$ nicht-reeller, komplex- konjugierter Eigenwerte, mit $n = p + 2q$, $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, $\nu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq q$, dann ist durch $\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ für $1 \leq j \leq p$ sowie

$$\psi_j(t) = e^{\nu_j t}(\cos(\omega_j t) u_j - \sin(\omega_j t) w_j)$$

und

$$\xi_j(t) = e^{\nu_j t}(\sin(\omega_j t) u_j + \cos(\omega t) w_j)$$

für $1 \leq j \leq q$ ein Fundamentalsystem von Lösungen gegeben. Dabei bezeichnet $v_j$ für $1 \leq j \leq p$ jeweils einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j$, und $v_j = u_j + iw_j$ für $1 \leq j \leq q$ jeweils einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$.

## Lösungsräume im nicht-diagonalisierbaren Fall

**Satz (3.12)**

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine Matrix mit der Eigenschaft, dass das charakteristische Polynom $\chi_A$ in $\mathbb{K}[x]$ in Linearfaktoren zerfällt. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von $A$ und $r \in \mathbb{N}$ dessen algebraische Vielfachheit. Dann gibt es ein linear unabhängiges Tupel

$$(\varphi_0, ..., \varphi_{r-1})$$

von Lösungen der Form $\varphi_k(t) = e^{\lambda t} p_k(t)$, wobei die Funktion $p_k : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$ in jeder Komponente ein Polynom vom Grad $\leq k$ ist.

<u>Beispiel</u>: $y' = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 \\ 7 & -2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$

Ansatz für die erste Komponente des Lösungstupels $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$

$\varphi_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Zu lösen ist die Gleichung

$\varphi_1'(t) = 3e^{3t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{!}{=} A\varphi_0(t) = e^{3t} A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow 3\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ muss ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 sein

Es gilt $\mathrm{Eig}(A,3) = \ker(A-3E) = \ldots = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow \varphi_0(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Lösung von $y' = Ay$

Ansatz für die Komponente $\varphi_1$

$$\varphi_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} a + dt \\ b + et \\ c + ft \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, \ldots, f \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_1'(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} d + 3(a+dt) \\ e + 3(b+et) \\ f + 3(c+ft) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} d + 3a + 3dt \\ e + 3b + 3et \\ f + 3c + 3ft \end{pmatrix} \overset{!}{=}$$

$$A\varphi_1(t) = e^{3t} A \begin{pmatrix} a + dt \\ b + et \\ c + ft \end{pmatrix} \iff A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} d + 3a \\ e + 3b \\ f + 3c \end{pmatrix}$$

$$\text{und } A \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3d \\ 3e \\ 3f \end{pmatrix} \overset{(**)}{=} 3 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

Lösung von $(*_2)$ ist der Eigenvektor

also $\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ einsetzen in $(*_1) \Rightarrow$

$$A\begin{pmatrix} b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3a \\ 3+3b \\ 1+3c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} 5a - 4b - 3c &= 3 \\ 7a - 5b - 6c &= 3 \\ a - b \phantom{- 6c} &= 1 \end{aligned} \quad \overset{\text{Gauß}}{\rightsquigarrow} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Also ist $\varphi_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 3t \\ -1+3t \\ \frac{1}{3}+t \end{pmatrix}$

Ansatz für die Komponente $\varphi_2$.

$$\varphi_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} a + dt + gt^2 \\ b + et + ht^2 \\ c + ft + jt^2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2'(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} d + 3a + (2g+3d)t + 3gt^2 \\ e + 3b + (2h+3e)t + 3ht^2 \\ f + 3c + (2j+3f)t + 3jt^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} (**)$$

$$A\varphi_2(t) \doteq e^{3t} A \begin{pmatrix} a + dt + gt^2 \\ b + et + ht^2 \\ c + ft + jt^2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$A\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2g+3d \\ 2h+3e \\ 2j+3f \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

Lösung $\begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+3d \\ 6+3e \\ 2+3f \end{pmatrix} \Longleftarrow$

(**)

$$\begin{aligned} 5d - 4e - 3f &= 6 \\ 7d - 5e - 6f &= 6 \\ d - e &= 2 \end{aligned} \quad \text{Gauß} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

konstanter Term in (**)

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + 3a \\ e + 3b \\ f + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ -2 + 3b \\ 2/3 + 3c \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} 5d - 4e - 3f &= 0 \\ 7d - 5e - 6f &= -2 \\ d - e &= 2/3 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Gauß}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 8/9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -2/3 - 2t + 3t^2 \\ 8/9 + 2/3\, t + t^2 \end{pmatrix} \quad \text{BtLsg}$$

# Erinnerung: Definition der Jordanmatrizen

**Definition**

Sei $F = (f_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ die Matrix gegeben durch $f_{k,k+1} = 1$ für $1 \leq k \leq n-1$, deren übrigen Einträge gleich Null sind, und es bezeichne $E \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ die Einheitsmatrix. Dann nennt man

$$J \quad = \quad \lambda E + F$$

die Jordanmatrix der Größe $n$ zum Eigenwert $\lambda$.

**Beispiel:** $\lambda = -2$, $n = 3$

$$J \quad = \quad (-2)E + F \quad = \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

# Fundamentalsystem für ein lineares System mit Jordanmatrix

## Satz (3.13)

Sei $J = \lambda E + F \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine Jordanmatrix. Dann besitzt das System $y' = Jy$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$\Phi(t) \;=\; e^{tJ} \;=\; \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2 e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-3)!}t^{n-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt also $\Phi'(t) = J\Phi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beispiel: $e^{Jt}$ für eine $3\times 3$-Jordanmatrix $J = \lambda E + F$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F^3 = 0$$

$$tJ = \begin{pmatrix} t\lambda & t & \\ & t\lambda & t \\ & & t\lambda \end{pmatrix} \qquad (tJ)^2 = t^2 (\lambda E + F)(\lambda E + F)$$

$$= t^2 (\lambda^2 E + \lambda F + \lambda F + F^2) = \begin{pmatrix} t^2\lambda^2 & 2t^2 & t^2 \\ 0 & t^2\lambda^2 & 2t^2 \\ 0 & 0 & t^2\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} t^2 J^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2\lambda^2 & t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & \frac{1}{2}t^2\lambda^2 & t^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}t^2\lambda^2 \end{pmatrix}$$

# Fundamentalsystem bei Matrix in Jordanscher Normalform

**Folgerung (3.14)**

Sei $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ eine Matrix in Jordanscher Normalform mit Jordanblöcken $J_1, ..., J_r$ auf der Hauptdiagonalen, also

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt das System $y' = Ay$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$\Phi(t) \quad = \quad \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tJ_r} \end{pmatrix}.$$

## Einsetzen von Matrizen in Funktionen

**Frage:** Was bedeutet der Ausdruck $e^{tJ}$? Darf man Matrizen einfach in Funktionen einsetzen? Und warum erhält man dadurch ein Fundamentalsystem für $y' = Jy$?

Zumindest für Polynomfunktionen ist das kein Problem, wie wir schon in der Linearen Algebra gesehen haben. Ist $f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{K}[x]$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, dann setzt man für $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ jeweils

$$f(A) \quad = \quad a_0 E + a_1 A + \ldots + a_n A^n.$$

Wie man leicht überprüft, gilt dabei die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dt}\left(f(tA)\right) \quad = \quad Af'(tA).$$

## Einsetzen von Matrizen in Funktionen (Forts.)

Sollen Matrizen in Potenzreihen eingesetzt werden, muss mit dem Konvergenzbegriff gearbeitet werden. Die Zeilensummennorm $\|\cdot\|$ auf $\mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ erfüllt die Relation $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ für $A, B \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$.

Damit kann leicht gezeigt werden: Ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine $\mathbb{K}$-wertige Potenzreihe mit Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}^+$, dann konvergiert die Folge der Partialsummen der Reihe

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

in $(\mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ für alle $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ mit $\|A\| < r$. (Im Fall $r = +\infty$ konvergiert die Reihe sogar auf ganz $\mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$.) Die Ableitungsregel

$$\frac{d}{dt}(f(tA)) = Af'(tA)$$

bleibt unverändert gültig.

## Matrixlösungen von linearen Systemen von DGL

Insbesondere ist für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ und jedes $t \in \mathbb{K}$ also die Matrix

$$e^{tA} \quad = \quad \exp(tA) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

also wohldefiniert, und es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) \quad = \quad A \exp'(tA) \quad = \quad A \exp(tA) \quad = \quad Ae^{tA}.$$

Dies zeigt, dass $\Phi(t) = e^{tA}$ sogar für jede Matrix $A \in \mathscr{M}_{n,\mathbb{K}}$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ ist, und nicht nur für Jordanmatrizen. Allerdings kann es für allgemeine Matrizen sehr mühsam werden, $e^{tA}$ zu berechnen.