

Lineare Differenzialgleichungen

Definition (2.4)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y' = f(x)y + g(x)$$

eine **lineare DGL** erster Ordnung. Ist $g(x) = 0$ für alle $x \in I$, dann spricht man von einer **homogenen**, ansonsten von einer **inhomogenen** Differentialgleichung.

Der Lösungsraum linearer DGLs

Proposition (2.5)

- (i) Für jedes Paar $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch (a, b) . Diese ist gegeben durch $\varphi(x) = be^{F(x)}$ mit der Funktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.
- (ii) Sind φ_1, φ_2 Lösungen der homogenen linearen DGL, und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda\varphi_1$ Lösungen dieser DGL.
- (iii) Sei ψ_0 eine Lösung der inhomogenen DGL. Dann sind die Lösungen dieser DGL insgesamt die Funktionen der Form $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ die Lösungen der homogenen linearen DGL durchläuft.

Beweis von Prop. 2.5 $y' = f(x)y + g(x)$

Sei $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ geg. durch $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Sei $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$.

Beh. $\varphi(x) = b e^{F(x)}$ ist Lösung der DGL durch den Punkt (a, b)

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= b F'(x) e^{F(x)} \stackrel{\text{HDI}}{=} b f(x) e^{F(x)} \\ &= f(x) b e^{F(x)} = f(x) \varphi(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \varphi$ ist Lösung von $y' = f(x)y$

außerdem $\varphi(a) = b e^{F(a)} = b e^{\int_a^a f(t) dt} = b e^0 = b$

$\Rightarrow \varphi$ ist Lösung von $y' = f(x) y$

zur Eindeutigkeit. Überprüfe, dass in einer Umgebung von (a, b) eine lokale Lipschitz-Bed. erfüllt ist.

Sei $J \subseteq I$ ein kompaktes Intervall mit $a \in J^\circ$

f stetig $\Rightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x)| \leq L$ für alle $x \in J$

$U = J \times \mathbb{R}$ ist Umg. von (a, b) , außerdem.

Für alle $(x, y), (x, z) \in U$ gilt

$$|(f(x)y + g(x)) - (f(x)z + g(x))| = |f(x)||y - z| \leq L|y - z|$$

Zu (ii) Seien φ_1, φ_2 Lösungen von $y' = f(x)y$, und $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \varphi_1'(x) = f(x)\varphi_1(x), \varphi_2'(x) = f(x)\varphi_2(x) \quad \forall x \in I$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\varphi_1 + \varphi_2)'(x) &= \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = f(x)\varphi_1(x) + f(x)\varphi_2(x) \\ &= f(x)(\varphi_1 + \varphi_2)(x) \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 \text{ ist Lsg. von } y' = f(x)y \end{aligned}$$

ebenso: $(\lambda \varphi_1)'(x) = \lambda \varphi_1'(x) = \lambda f(x) \varphi_1(x)$
 $= f(x) (\lambda \varphi_1)(x) \Rightarrow \lambda \varphi_1$ löst $y' = f(x)y$

zu iii) Sei $\mathcal{L}$ die Menge der inhom. Lsg.,
 $\mathcal{L}_0$ der $\mathbb{R}$ -Vektorraum der hom. Lsg.
 und $\varphi_0 \in \mathcal{L}$ Beh.: $\mathcal{L} = \varphi_0 + \mathcal{L}_0$

" $\supseteq$ " Sei φ eine Lsg. von $y' = f(x)y + g(x)$
 z.z. $\varphi_0 + \varphi$ ist Lsg. von $y' = f(x)y + g(x)$

$$\varphi \in \mathcal{L}_0 \Rightarrow \varphi'(x) = f(x) \varphi(x) \quad \forall x \in I$$

$$\varphi_0 \in \mathcal{L} \Rightarrow \varphi_0'(x) = f(x) \varphi_0(x) + g(x) \quad \forall x \in I$$

$$(\varphi_0 + \varphi)'(x) = \varphi_0'(x) + \varphi'(x) =$$

Bew

geg:

ges:

Sei φ

Funkt

Lsg

die Aq

φ ist L

$\varphi'(x) =$

$$f(x) \varphi_0(x) + g(x) + f(x) \varphi(x) =$$

$$f(x)(\varphi_0 + \varphi)(x) + g(x) \quad \forall x \in I \rightarrow$$

$$\varphi_0 + \varphi \in \mathcal{L}$$

" $\subseteq$ " Sei $\psi \in \mathcal{L}$ und $\psi = \psi - \varphi_0$.

Beh. $\psi \in \mathcal{L}_0$ (dann folgt $\psi = \varphi_0 + \psi$
 $\in \varphi_0 + \mathcal{L}_0$)

$$\psi \in \mathcal{L} \Rightarrow \psi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow \psi'(x) = \psi'(x) - \varphi_0'(x) = f(x)\psi(x) +$$

$$g(x) - f(x)\varphi_0(x) - g(x) = f(x)(\psi - \varphi_0)(x)$$

$$= f(x)\psi(x), \text{ jeweils f\"ur alle } x \in I \Rightarrow$$

$$\psi \in \mathcal{L}_0 \quad \square$$

Lösung durch Variation der Konstanten

Satz (2.6)

Sei $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$ vorgegeben und $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der homogenen linearen DGL $y' = f(x)y$ durch $(a, 1)$. Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u(x) = b + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dann ist $\psi = u\varphi$ die eindeutig bestimmte Lösung der inhomogenen linearen DGL $y' = f(x)y + g(x)$ durch den Punkt (a, b) .

Beweis von Satz 2.6

geg.: inhom. lin. DGL $y' = f(x)y + g(x)$ (*)
 $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$

ges.: Lösung ψ durch (a, b)

Sei $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine bel. stetig diff'bare Funktion und $\psi = u \varphi$, wobei φ eine Lsg. von $y' = f(x)y$ ist. Dann gilt die Äquivalenz

ψ ist Lsg. von (*) $\Leftrightarrow \forall x \in I$

$$\psi'(x) = f(x)\psi(x) + g(x) \Leftrightarrow$$

$$(u\varphi)'(x) = f(x)u(x)\varphi(x) + g(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(x)\varphi(x) + u(x)\varphi'(x) = f(x)u(x)\varphi(x) + g(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(x)\varphi(x) + \cancel{u(x)f(x)\varphi(x)} = \cancel{f(x)u(x)\varphi(x)} + g(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(x)\varphi(x) = g(x) \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow u'(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x)} \quad \forall x \in I$$

$$\Leftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I: u(x) = b' + \int_a^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt$$

außerdem: φ läuft durch (a, b)

$$\Leftrightarrow b = \varphi(a) = u(a)\varphi(a) =$$

$$(b' + \int_a^x \frac{g(t)}{p(t)} dt) \cdot \varphi(a) = (b' + 0) \cdot 1 = b'$$

also: $\psi = u \varphi$ löst (*) und läuft durch (a, b)

$$\Leftrightarrow u(x) = b + \int_a^x \frac{g(t)}{p(t)} dt.$$



Bsp. $y' = 2xy + x^3$

(d.h. $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, $g(x) = x^3$)

Ziel: Bestimmung einer Lsg. y_0 durch $(0, b)$, f. z. bel. $b \in \mathbb{R}$

1 Schritt: Bestimme die Lsg. φ von $y' = f(x)y$ durch $(0, 1)$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x 2t dt = [t^2]_0^x = x^2$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^{F(x)} = e^{x^2} \text{ ist die ges. Lsg.}$$

(Probe: $\varphi'(x) = 2x e^{x^2} = f(x)\varphi(x)$, $\varphi(0) = e^{0^2} = 1$)

2 Schritt: Variation der Konstanten

$$u(x) = b + \int_0^x \frac{g(t)}{\varphi(t)} dt = b + \int_0^x \frac{t^3}{e^{t^2}} dx = b + \int_0^x t^3 e^{-t^2} dt$$

$$b + \frac{1}{2} \int_0^x (2t) t^2 e^{-t^2} dt = b + \frac{1}{2} \int_0^x \underset{\downarrow}{t} \underset{\uparrow}{e^{-t^2}} dt$$

$$= b + \frac{1}{2} [-t e^{-t}]_0^{x^2} + \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^{-t} dt =$$

$$b - \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} [-e^{-t}]_0^{x^2} = b - \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} (-e^{-x^2} + 1)$$

$$= b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \psi(x) = u(x) \varphi(x) = \left(b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{-x^2} \right) e^{x^2}$$

$$= \left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) \quad \text{ist die ges. Lsg.}$$

Probe: $\psi'(x) = 2x \left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - \frac{1}{2} (2x)$

$$= 2x \left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - x$$

$$2x \psi(x) + x^3 = 2x \left(\left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - \frac{1}{2} (x^2 + 1) \right) + x^3$$

$$= 2x \left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - x^3 - x + x^3 = 2x \left(b + \frac{1}{2} \right) e^{x^2} - x$$

$$\psi(0) = \left(b + \frac{1}{2} \right) e^0 - \frac{1}{2} (0^2 + 1) = b + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = b$$

Definition (2.7)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in G$ gilt. Wir bezeichnen eine stetig differenzierbare Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{R}$ als **Stammfunktion** von (f, g) , wenn $\partial_1 F = f$ und $\partial_2 F = g$ gilt. Die Differenzialgleichung

$$y' = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

wird **exakte DGL** genannt, wenn das Paar (f, g) eine Stammfunktion besitzt.

notwendiges Kriterium für die Existenz einer Stammfunktion:

$$\partial_2 f = \partial_1 g$$

Lösungen exakter Differenzialgleichungen

Satz (2.8)

Sei F eine Stammfunktion des Paares (f, g) . Eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall I ist genau dann eine Lösung der DGL $y' = -\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$, wenn $(t, \varphi(t)) \in G$ für alle $t \in I$ gilt und die Funktion $t \mapsto F(t, \varphi(t))$ auf I **konstant** ist.

Beweis von Satz 2.8:

geg $G \subseteq \mathbb{R}^2$ Gebiet, $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$F: G \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfkt. von (f, g)

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar ($I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall)

Beh: φ löst $y' = -\frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ $\iff (t, \varphi(t)) \in G \forall t \in I$
und $t \mapsto F(t, \varphi(t))$
ist konstant

klar: φ kann nur dann eine Lsg. sein, wenn $(t, \varphi(t)) \in G$

für alle $t \in I$ gilt. Sei $u: I \rightarrow G$ geg

durch $u(t) = (t, \varphi(t))$. Dann gilt die Äquivalenz

oder: (kann nur dann eine Lsg. sein, wenn $(t, \varphi(t)) \in G$

$$F \circ u \text{ ist konstant} \Leftrightarrow (F \circ u)'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow F'(u(t)) \cdot u'(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \partial_1 F(t, \varphi(t)) & \partial_2 F(t, \varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(t, \varphi(t)) & g(t, \varphi(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow f(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) g(t, \varphi(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(t) = - \frac{f(t, \varphi(t))}{g(t, \varphi(t))} \quad \forall t \in I$$

$$\Leftrightarrow \varphi \text{ ist Lösung von } (*)$$

□

Bsp. $y' = -\frac{x}{y} \quad (*)$

hier: $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

$f: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x$

$g: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$

$(*)$ ist eine exakte DGL, denn

$F: G \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

ist eine Stammfkt. von (f, g)

Laut Satz 2.8 sind die Lösungen
genau die stetig diff'baren Funt-

Bsp

$G =$

$g(x)$

$\partial_2 f$

$\partial_1 g$

gesucht

$\partial_2 ($

$(\partial_2 \mu)$

tionen $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall), für die $t^2 + \varphi(t)^2$ konstant ist, d.h. deren Funktionsgraph in einem oberen Halbkreis verläuft. $\square$

Integrierender Faktor einer exakten DGL

Definition (2.9)

Eine Funktion $\mu : G \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wird **integrierender Faktor** eines Paares (f, g) von stetigen reellwertigen Funktionen f, g auf G genannt, wenn für $(\mu f, \mu g)$ eine Stammfunktion existiert.

Bsp. $y' = \frac{y^2 - 3xy - 2x^2}{x^2 - xy}$

$G = \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$
 $g(x, y) = x^2 - xy$

$\left. \begin{aligned} \partial_2 f(x, y) &= 3x - 2y \\ \partial_1 g(x, y) &= 2x - y \end{aligned} \right\} + = (f, g) \text{ hat keine Stammfkt.}$

gesucht: integ. Faktor μ

$\partial_2(\mu f) \stackrel{!}{=} \partial_1(\mu g)$ —

$(\partial_2 \mu) f + \mu(\partial_2 f) \stackrel{!}{=} (\partial_1 \mu) g + \mu(\partial_1 g)$

$$\partial_1 g(x, y) = 2x - y$$

keine Stammfkt.

$$\Leftrightarrow (\partial_1 \mu)(x, y) (x^2 - xy) + \mu(x, y) (2x - y) \stackrel{!}{=} \\ (\partial_2 \mu)(x, y) (2x^2 + 3xy - y^2) + \mu(x, y) (3x - 2y)$$

Die Gleichung wird gelöst durch

$$\mu(x, y) = x$$

Eine Stammfkt. von $(\mu f, \mu g)$ ist geg. durch

$$F(x, y) = x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 + \frac{1}{2} x^4.$$

□