Definition der Lipschitz-Bedingung

Definition (1.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) Wir sagen, f genügt auf D einer Lipschitz-Bedingung, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\|y - z\| \qquad \text{für alle} \quad (x, y), (x, z) \in D$$

erfüllt ist.

(ii) Die Funktion f genügt auf D lokal einer Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x, y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ existiert, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Der Eindeutigkeitssatz

Satz (1.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des Systems von DGLs $y' = f(x, y)$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann folgt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Bem.: Ist in der DGL $y' = f(x,y)$ die Funktion f nur stetig, erfüllt aber keine lokale Lipschitz-Bed., dann können durch einen Punkt (a,b) unendlich viele Lösungen laufen.

Bsp.: $y' = y^{2/3}$ $\left(D = \mathbb{R}^2,\ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto y^{2/3}\right)$

Betrachte Lösungen durch $(a,b) = (0,0)$.

(i) die Nullfunktion

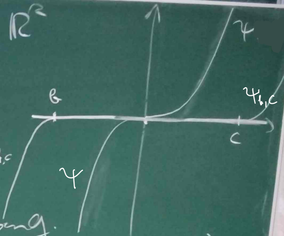
(ii) $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{27}x^3$

$(\varphi'(x) = \frac{1}{9}x^2,\ \varphi(x)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}x^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = \frac{1}{9}x^2$

$\varphi'(x) = \frac{1}{9}x$, $\varphi(x)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}x^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 = \frac{1}{9}x$

(iii) Definiere für jedes Paar $(b, c) \in \mathbb{R}^2$
mit $b < 0 < c$ die Funktion

$$\varphi_{b,c}(x) = \begin{cases} \frac{1}{27}(x-b)^3 & \text{für } x \le b \\ 0 & \text{für } b < x < c \\ \frac{1}{27}(x-c)^3 & \text{für } x \ge c \end{cases}$$



Jedes solche $\varphi_{b,c}$ ist ebenfalls eine Lösung.

Bem. Die Funktion $f(x,y) = y^{2/3}$ erfüllt in keiner Umg. von $(0,0)$ eine Lipschitz-Bedingung

Ang $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine offene Umg. und $L \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|f(x,y) - f(x,z)| \le L|y-z| \quad \forall (x,y),(x,z) \in U \quad (*)$$

Betrachte die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $z_n = \frac{1}{n}$ und $x = 0$, $y = 0$. Dann gilt $(0, \frac{1}{n}) \in U$ für $n \ge N$, N hinr. groß, ebenso $(0,0) \in U$

Einsetzen in (*) $\Rightarrow$

$$|f(0,0) - f(0,\tfrac{1}{n})| \leq L\,|0 - \tfrac{1}{n}| \quad \forall n \geq N$$

$$|0 - (\tfrac{1}{n})^{2/3}| \leq L\,\tfrac{1}{n} \quad \forall n \geq N \iff$$

$$n^{-2/3} \leq L\,\tfrac{1}{n} \quad \forall n \geq N \iff$$

$$1 \leq L\,n^{-1/3} \quad \forall n \geq N \quad \lightning \text{ da } \lim_{n \to \infty} n^{-1/3} = 0.$$

$\square$

Der lokale Existenzsatz

Satz (1.9)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(a, b) \in D$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung

$$\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{R}^n$$

des Systems $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Satz (1.10)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt

(i) $\varphi(a) = b$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$

(ii) Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres offenes Intervall mit $a \in J$ und $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\psi(a) = b$ und $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$ für alle $x \in J$, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Man bezeichnet φ als maximale Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch die gewöhnliche Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ und das Paar (a, b).

Beweis von Satz 1.10:

geg. System $y' = f(x, y)$, $(a, b) \in D$

Definition der maximalen Lösung φ:

lokaler Existenzsatz $\Rightarrow \exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung φ der DGL auf $]a-\delta, a+\delta[$ durch (a, b). Definiere

$x_+ = \sup\{ x \in \mathbb{R},\ x > a \mid \exists$ Lsg auf $]a-\delta, x[$ durch $(a, b) \}$ $(a+\delta \leq x_+ \leq +\infty)$

Beh.: Es existiert eine Lsg auf $]a-\delta, x_+[$.

dann. Sei $x \in\ ]a-\delta, x_+[\Rightarrow \exists$ eine Lösung φ_+ auf $]a-\delta, x[$. Eindeutigkeitssatz $\Rightarrow$

φ und φ_+ stimmen auf $]a-\delta, a+\delta[$

über...
auf
Einde...
im Pu...
Erhalt...
ganze
Auf dies...
und eine
$]a-\delta, a$...
Die Lsg
überein (
eine Lsg

also: $\exists$...
folgt er...

überein. Definiere nun $\psi : \,]a-\delta, x_+[\, \to \mathbb{R}$ auf $]a-\delta, x[$ durch $\psi(t) = \varphi_+(t)$

Eindeutigkeitssatz $\Rightarrow$ Die Definition von ψ im Punkt x ist unabhängig von der Wahl von φ_+

Erhalte auf diese Weise eine Lsg. die auf ganz $]a-\delta, x_+[$ definiert ist.

Auf dieselbe Weise erhält man ein $x_- \leq a-\delta$ und eine Lsg. ψ_1 auf $]x_-, a+\delta[$, die auf $]a-\delta, a+\delta[$ mit φ übereinstimmt.

Die Lsg ψ_1 und ψ stimmen auf $]a-\delta, a+\delta[$ überein (da sie gleich φ sind) $\Rightarrow$ erhalte eine Lsg $\tilde{\psi}$ auf ganz $]x_-, x_+[$

also: $J \subseteq I$. Die Gleichheit $\tilde{\psi}|_J = \alpha$ folgt erneut aus dem Eindeutigkeitssatz.

$= 0.$

□

Nachweis der Eindeutigkeit:

Ang $\alpha : J \to \mathbb{R}$ ist eine weitere Lsg. durch (a,b) mit $a \in J$. <u>Beh.</u>: $J \subseteq I$ und $\tilde{\varphi}|_J = \alpha$. Ang $J \not\subseteq I$.

<u>1. Fall</u>: $\exists c \in J$ mit $c > x_+ \Rightarrow \,]a-\delta, x_+[\, \subsetneq \,]a-\delta, c[$

Eindeutigkeitssatz $\Rightarrow$ $\tilde{\varphi}$ und α stimmen auf $]a-\delta, x_+[$ übereinstimmen $c > x_+$ ↯ zur Def. von x_+ als Supremum.

<u>2. Fall</u>: $\exists c \in J$ mit $c < x_-$ analog

<u>also</u>: $J \subseteq I$. Die Gleichheit $\tilde{\varphi}|_J = \alpha$ folgt erneut aus dem Eindeutigkeitssatz. □

Umformulierung für DGLs höherer Ordnung

Folgerung (1.11)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, und $(a, b) \in D$, $b = (b_0, ..., b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es ein offenes Intervall I mit $a \in I$ und eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(i) Die Funktion φ ist eine Lösung der DGL $y^{(n)} = f(x, y, ..., y^{(n-1)})$ mit $b_k = \varphi^{(k)}(a)$ für $0 \leq k \leq n-1$.

(ii) Ist $\psi : J \to \mathbb{R}$ eine weitere Lösung auf einem offenen Intervall mit den unter (i) genannten Eigenschaften, dann gilt $J \subseteq I$ und $\varphi|_J = \psi$.

Existenzsatz von Peano

Satz (1.12)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig und $(a, b) \in D$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $a \in I$ und eine Lösung $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

§ 2. Elementare Lösungsmethoden für DGLs in spezieller Form

Definition (2.1)

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle und $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, wobei $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$ gilt. Dann nennt man $y' = f(x)g(y)$ eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Lösung von DGLs mit getrennten Variablen

Satz (2.2)

Seien die Funktionen $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J \to \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ und $G(x) = \int_b^x g(t)^{-1} dt$. Ist dann $H : J' \to J$ die Umkehrfunktion von G und $I' \subseteq I$ ein offenes Intervall mit $F(I') \subseteq J'$, dann ist

$$\varphi : I' \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto (H \circ F)(x)$$

eine durch (a, b) verlaufende Lösung der DGL. Diese ist eindeutig bestimmt, d.h. in einer hinreichend kleinen Umgebung von a stimmt jede Lösung der DGL durch (a, b) mit φ überein.

Beweis von Satz 2.2:

z.zg: $\varphi(x) = (H \circ F)(x)$ ist Lsg. von $y' = f(x)g(y)$
mit $\varphi(a) = b$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad G(x) = \int_b^y g(t)^{-1}\,dt$$

$\Rightarrow F(a) = G(b) = 0$. Hauptsatz der Differential- und Integralr. $\Rightarrow F' = f$, $G' = \frac{1}{g}$. Wegen $g \neq 0$ auf J ist G' durchgehend positiv oder negativ, also streng mon. wachsend oder fallend auf ganz J $\Rightarrow$ Es existiert eine Umkehrfkt. $H: J' \to J$, wobei $J' = G(J)$

Nach Def gilt $\varphi(x) = (H \circ F)(x)\ \forall x \in I' \Longleftrightarrow$

$(G \circ \varphi)(x) = F(x)\ \forall x \in I'$

$(G \circ \varphi)'(x) = F'(x) \overset{\text{Kettenregel}}{\Longleftrightarrow} G'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = F'(x)$

$\Longleftrightarrow \dfrac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x) \Longrightarrow \varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x))$

außerdem: $\varphi(a) = (H \circ F)(a) = H(0) = b$

$\quad G(b) = 0 \Longrightarrow b = H(G(b)) = (0)$

Sei nun $\psi : I'' \to \mathbb{R}$ eine bel Lösung durch (a, b), d.h. $\psi(a) = b$, $a \in I''$

$\Longrightarrow \psi'(x) = f(x)\, g(\psi(x))\ \forall x \in I''$ $\quad \psi(a) = b \in J$

Nach evtl Verkleinerung von I'' gilt $I'' \subseteq I$, $\psi(x) \in J\ \forall x \in I''$

Äquivalenzumf von oben $\Rightarrow (G \circ \psi)'(x) = F'(x)$.

$\Rightarrow \exists$ Konstante c mit $(G \circ \psi)(x) = F(x) + c \quad \forall x \in I''$ $\quad c = F(a) + c = (G \circ \psi)(a)$

$= G(b) = 0 \Rightarrow (G \circ \psi)(x) = F(x) \; \forall x \in I''$

$\Rightarrow \psi(x) = (H \circ F)(x) = \varphi(x) \; \forall x \in I''$. $\square$

Bsp.: Bestimme für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ eine Lösung φ_c von $y' = y^2$ durch $(0, c)$

$(D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $y' = f(x) g(y))$

mit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2$

$F(x) = \int_0^x dt = x$, $G(y) = \int_c^y \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_c^y$

$= \frac{1}{c} - \frac{1}{y}$ $\quad J' = G(]0, +\infty[) =]-\infty, \frac{1}{c}[$

Bestimmung der Umkehrfkt. $H: J \to \mathbb{R}^+$

$x = G(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{c} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{c} - x$

$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\frac{1}{c} - x} = \frac{c}{1 - cx}$

$\Rightarrow$ Die Umkehrfkt. ist geg. durch $H(x) = \frac{c}{1-cx}$

Das Intervall $I' =]-\infty, \frac{1}{c}[$ erfüllt $F(I') \subseteq J'$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Lsg. ist somit insgesamt

$\varphi_c :]-\infty, \frac{1}{c}[\to \mathbb{R}, \; x \mapsto (H \circ F)(x)$

$= H(x) = \frac{c}{1 - cx}$

(Probe: $\varphi_c(0) = \frac{c}{1 - c0} = c$, $\varphi_c'(x) = -\frac{c \cdot (-c)}{(1-cx)^2}$

$$= \frac{c^2}{(1-cx)^2} = \varphi_c(x)^2 \qquad \square$$

cx

$\frac{c\cdot(-c)}{(1-cx)^2}$

Lösung von DGLs durch Substitution

Satz (2.3)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Wir betrachten die DGLs der Form

(1) $y' = f(ax + by + c) \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}\ ,\ \ b \neq 0$

(2) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

(3) $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) \quad \text{mit } a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ ,\ \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$

(i) Genau dann ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1), wenn $\psi(x) = ax + b\varphi(x) + c$ eine Lösung der DGL $y' = a + bf(y)$ ist.

(ii) Genau dann ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (2), wenn $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ eine Lösung der DGL $y' = \frac{1}{x}(f(y) - y)$ ist.

(iii) Die Form (3) kann durch eine lineare Substitution auf die Form (2) zurückgeführt werden.

Beweis von Satz 2.3 [redacted] zu (i)

geg. die DGLs $y' = f(ax + by + c)$ $(*_1)$

und $y' = a + b f(y)$ $(*_2)$

Sei φ eine Lsg. von $(*_1)$ und $\psi(x) = ax + b\varphi(x) + c$.

überprüfe: ψ ist Lsg. von $(*_2)$

$$\psi'(x) = a + b\varphi'(x) = a + b f(ax + b\varphi(x) + c)$$

$$= a + b\psi(x) \Rightarrow \psi \text{ löst } (*_2)$$

Sei nun ψ eine Lsg. von $(*_2)$. setze $\varphi(x) = \frac{1}{b}\psi(x) - \frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ überprüfe: φ löst $(*_1)$

$$= a + b\psi(x) \Rightarrow \psi \text{ löst } (*_2)$$

Sei nun ψ ... $(*_2)$ ... $\varphi(x) =$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{b}\psi'(x) - \frac{a}{b} = \frac{1}{b}\left(a + b\psi(x)\right) - \frac{a}{b} =$$

$$\psi(x) = ax + b\varphi(x) + c \Rightarrow \varphi \text{ ist Lsg von } (*_1)$$

zu (ii) weitgehend analog

zu (iii) Vorgehensweise: Bestimme die eind. best. Lsg (x_0, y_0) des LGS $ax + by + c = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ überprüfe. Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lsg der DGL (3) mit $x_0 \notin I$, dann definiere $\psi : I' \to \mathbb{R}$ durch

$$\psi(x) = \varphi(x + x_0) - y_0.$$

Dann ist ψ eine Lösung von $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ mit $g(y) = f\left(\frac{a + by}{\alpha + \beta y}\right)$, wobei $I' = (-x_0) + I$. Ebenso gilt die Umkehrung. $\square$