§ 1. Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Gewöhnliche DGL

Definition (1.1)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

- Dann nennt man $y' = f(x, y)$ eine Differenzialgleichung (DGL) erster Ordnung.
- Die Menge D nennt man den Definitionsbereich der DGL.
- Eine Lösung der DGL ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ gilt.

Anmerkungen und Beispiele

- Die Gleichung $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ kann zu einer Integralgleichung umgeformt werden. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist sie äquivalent zu

$$\varphi(x) \quad = \quad \varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt.$$

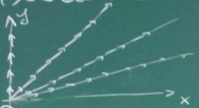
- Durch die Funktion f wird auf D ein Vektorfeld definiert. Der Graph $\Gamma_\varphi \subseteq D$ einer Lösung φ besitzt in jedem seiner Punkte $(x, y) \in \Gamma_\varphi$ den Vektor $(1, f(x, y))$ jeweils als Tangentialvektor.

Beispiele: (i) $y' = \frac{y}{x}$ (ii) $y' = -\frac{x}{y}$

Beispiele für DGLs und ihre Lösungen

(1) $y' = \frac{y}{x}$, Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

$f(x,y) = \frac{y}{x}$

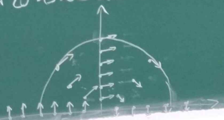


Für jedes $c \in \mathbb{R}^+$ ist $\varphi_c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto cx$ eine Lösung,

denn $\varphi_c'(x) = c = \frac{cx}{x} = \frac{\varphi_c(x)}{x}$

(2) $y' = -\frac{x}{y}$, Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

$f(x,y) = -\frac{x}{y}$



Für jedes $c \in \mathbb{R}^+$

Systeme von Differentialgleichungen

Definition (1.2)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, mit Komponentenfunktionen $f_1, ..., f_n$. Dann nennt man

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, ..., y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{aligned}$$

ein System von n Differenzialgleichungen erster Ordnung. Eine Lösung des Systems ist eine auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte, stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, so dass $(x, \varphi(x)) \in D$ und $\varphi_k'(x) = f_k(x, \varphi(x))$ für alle $x \in I$ und für $1 \leq k \leq n$ erfüllt ist.

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Definition (1.3)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Differenzialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Eine Lösung der DGL ist eine n-mal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, so dass $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in D$ und

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist.

Übersetzung von DGLs höherer Ordnung in Systeme

- Jeder Differenzialgleichung n-ter Ordnung wie in (1.3) lässt sich ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung zuordnen, und zwar

$$y_0' = y_1\ ,\ y_1' = y_2\ , \ldots,\ y_{n-2}' = y_{n-1}\ ,\ y_{n-1}' = f(x, y_0, \ldots, y_{(n-1)}).$$

- Ist $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, dann ist durch $(\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung des Systems gegeben.
- Ist umgekehrt $(\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1})$ eine Lösung des Systems, dann ist die Funktion φ_0 eine Lösung der DGL höherer Ordnung.

Beispiel für die Übersetzung einer DGL 2. Ordnung in ein System von DGLs

Betrachte $y'' = -y$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}, \; (x, y_0, y_1) \mapsto -y_0$

zugeordnetes System:

$$y_0' = y_1, \quad y_1' = -y_0$$

Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$

$f: D \to \mathbb{R}^2, \; (x, y_0, y_1) \mapsto (y_1, -y_0)$

Lösung der DGL 2. Ordnung:

$$\varphi(x) = \sin(x)$$

$$\varphi''(x) = \sin''(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$$

$$= -\varphi(x)$$

Lösung des Systems:

$$\varphi(x) = (\sin(x), \cos(x))$$

$$\varphi_0'(x) = \sin'(x) = \cos(x) = \varphi_1(x)$$

$$\varphi_1'(x) = \cos'(x) = -\sin(x) = -\varphi_0(x)$$

Definition der Lipschitz-Bedingung

Definition (1.4)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung.

(i) Wir sagen, f genügt auf D einer Lipschitz-Bedingung, wenn eine Konstante $L \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L\|y - z\| \qquad \text{für alle} \quad (x,y),(x,z) \in D$$

erfüllt ist.

(ii) Die Funktion f genügt auf D lokal einer Lipschitz-Bedingung, wenn für jeden Punkt $(x,y) \in D$ eine Umgebung $U \subseteq D$ existiert, so dass $f|_U$ auf U einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Hinreichendes Kriterium für die Lipschitz-Bedingung

Proposition (1.5)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige, nach $y_1, ..., y_n$ stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann genügt f einer lokalen Lipschitz-Bedingung.

<u>Notation</u>: geg. stetige Fkt. $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

definiere $\int_a^b g(x)\, dx = \left(\int_a^b g_1(x)\, dx, \dots, \int_a^b g_n(x)\, dx \right)$

Auch für Systeme von DGLs $y' = f(x, y)$
mit $f : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gilt:
Die DGL $\varphi'(x) = f(x, y)$ ist äquivalent zur
Integralgleichung $\underbrace{\varphi(x)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{\varphi(a) + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt}_{\in \mathbb{R}^n}$

Der Eindeutigkeitssatz

Satz (1.6)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen des Systems von DGLs $y' = f(x, y)$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Gilt $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, dann folgt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis von Satz 1.6:

geg.: System $y' = f(x,y)$, $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}^n$

Lösungen, $a \in I$ mit $\varphi(a) = \psi(a)$

z.zg.: $\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in I$

Zeige zunächst: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass $\varphi(x) = \psi(x) \ \forall x \in I$ mit $|x-a| < \varepsilon$

Betrachte die Differenz

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x \left(f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \right) dt \quad \text{für } x \in I$$

lokale Lipschitz-Bed. $\Rightarrow \exists L, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ mit

$\| f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t)) \| \leq L |\varphi(t) - \psi(t)| \quad \forall t \in I$ mit $|t-a| \leq \varepsilon_1$

Sei nun $\varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1]$ und $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

$$\| \varphi(x) - \psi(x) \| \leq \int_a^x \| (f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))) \| \, dt$$

$$\leq L \left| \int_a^x \| \varphi(t) - \psi(t) \| \, dt \right|$$

Definiere $m(\varepsilon) = \sup \{ \| \varphi(t) - \psi(t) \| \mid |t-a| < \varepsilon \}$

$\Rightarrow \| \varphi(x) - \psi(x) \| \leq L |x-a| \, m(\varepsilon) \leq L \varepsilon m(\varepsilon)$

für alle $x \in I$ mit $|x-a| < \varepsilon$

$\Rightarrow m(\varepsilon) \leq L \varepsilon m(\varepsilon)$, nach Def. von $m(\varepsilon)$

Wähle ε so klein, dass $L\varepsilon < 1$.

$\Rightarrow m(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \| \varphi(x) - \psi(x) \| = 0$

$\forall x \in I$ mit $|x-a| < \varepsilon \Rightarrow \varphi(x) = \psi(x) \; \forall x \in I, |x-a| < \varepsilon$ $\square$

$$\Rightarrow \|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq L|x-a|\, m(\varepsilon) \leq L\varepsilon\, m(\varepsilon)$$

Um zu zeigen, dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$ mit $x \geq a$ gilt, betrachte

$$b = \sup\{x \in I \mid \varphi|_{[a,x]} = \psi|_{[a,x]}\}$$

Annahme: b ist nicht der rechte Randpunkt von I, insb. $b < +\infty$ (sonst fertig!)

Da φ und ψ stetig in b sind, gilt

$$\varphi(b) = \lim_{x \to b^-} \varphi(x) = \lim_{x \to b^-} \psi(x) = \psi(b)$$

(linksseitiger Grenzwert)

Wie bereits gezeigt, existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\Rightarrow$

$\psi(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in I$ mit $|x - b| < \varepsilon$

$\psi|_{[a, b+\frac{1}{2}\varepsilon]} = \varphi|_{[a, b+\frac{1}{2}\varepsilon]}$ $\lightning$ zu Def. von b

Analog zeigt man $\varphi(x) = \psi(x)$ $\forall x \in I$ mit $x \leq a$. $\square$

[redacted]

Erinnerung: Banachscher Fixpunktsatz

- Banachscher Fixpunktsatz:
  Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\phi : X \to X$ eine Kontraktion, dann besitzt ϕ in X einen eindeutig bestimmten Fixpunkt.

- Eine Abbildung ϕ wird als Kontraktion bezeichnet, wenn es eine Konstante $\gamma \in [0, 1[$ gibt, so dass

$$d(\phi(x), \phi(y)) \quad \leq \quad \gamma d(x, y)$$

  für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.

Definition eines geeigneten Bachnachraums

Lemma (1.7)

Sei $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sei außerdem $n \in \mathbb{N}$ und $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$ die Menge der stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}^n$. Dann ist $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\|f\|_\infty \quad = \quad \sup\{\|f(x)\| \mid x \in I\}$$

ein Banachraum, also ein vollständiger normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Definition vollständiger metrischer Teilräume

Lemma (1.8)

Sei $\bar{B} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist die Menge der Funktionen $\mathscr{C}(I, \bar{B})$ abgeschlossen in $\mathscr{C}(I, \mathbb{R}^n)$. Also ist $\mathscr{C}(I, \bar{B})$ bezüglich der Metrik $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum.

Der lokale Existenzsatz

Satz (1.9)

Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(a, b) \in D$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lösung

$$\varphi :]a - \delta, a + \delta[\to \mathbb{R}^n$$

des Systems $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$.

Beweis von Satz 1.9:

geg.: $f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, mit lokaler Lipschitz-Bed., wobei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $(a, b) \in D$

z.zg.: $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+$ und eine Lsg. $\varphi :]a-\delta, a+\delta[\to \mathbb{R}^n$ von $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(a) = b$

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a \in I^\circ$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Wähle I und ε so klein, dass $X = I \times \overline{B}_\varepsilon(b) \subseteq D$ liegt, und dass f einer Lipschitz-Bed. mit Konstante $L \in \mathbb{R}^+$

$m(\varepsilon)$

$I, |x-a| < \varepsilon$

erfüllt X kompakt, f stetig, Maximumsprinzip

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{R}_+$ mit $\|f(t,x)\| \leq m \;\; \forall\, (t,x) \in X$

Wähle δ so klein, dass $[a-\delta, a+\delta] =: J \subseteq I$

und $L\delta < 1$ und $m\delta < \varepsilon$.

Betrachte nun den Banachraum $V = \mathcal{C}(J, \mathbb{R}^n)$

mit Norm $\|\ \|$ und $\Phi: V \to V$ geg.

$$\Phi(\varphi)(x) = b + \int_a^b f(t, \varphi(t))\, dt$$

Betrachte in V die Teilmenge $Y = \mathcal{C}(J, \overline{B}_\varepsilon(b))$

(ist vollständiger metrischer Raum, nach Lemma 1.8.)

Sei $\varphi \in Y$ und $x \in J$.

(... vollständiger metrischer Raum, nach Lemma 1.8.)
Sei $\varphi \in Y$ und $x \in J$.

$$\|\Phi(\varphi)(x) - b\| \leq \left\| \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt \right\| \leq M\delta < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \Phi(\varphi)(x) \in \overline{B}_\varepsilon(b) \Rightarrow \Phi(\varphi) \in Y$$

<u>also</u>: $\Phi|_Y$ ist Abb. $Y \to Y$

<u>z. zg.</u>: Φ ist Kontraktion

Seien $\varphi, \psi \in Y$, $t \in J$. $\Rightarrow \varphi(t), \psi(t) \in \overline{B}_\varepsilon(b)$

lokale Lipschitz-Bed. $\Rightarrow \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|$

$\leq L\|\varphi(t) - \psi(t)\| \Rightarrow \|\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\|_\infty =$

$$\sup_{x \in J} \left| \int_a^x (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)))\, dt \right| \leq$$

$$\sup_{x \in J} \int_a^x \|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))\|\, dt \leq L\|\varphi - \psi\|_\infty \cdot \delta$$

[redacted]

damit gezeigt: $\Phi|_Y : Y \to Y$ ist Kontraktion, mit Kontraktionskonst. $L\delta < 1$.

B. Fixpunktsatz $\Rightarrow \exists\, \varphi \in Y$ mit $\Phi(\varphi) = \varphi$

$\Rightarrow \varphi(x) = b + \int_a^x f(t, \varphi(t))\, dt$

$\Rightarrow \varphi$ ist Lösung der DGL und:

$$\varphi(a) = b + \int_a^a f(t, \varphi(t))\, dt = b + 0 = b.$$

$\square$