Satz über holomorphe Funktionen auf Kreisringen

Satz (5.5)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gibt es für jede holomorphe Funktion $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ jeweils eindeutig bestimmte, holomorphe Funktionen $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ und $f_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z| \to +\infty} |f_h(z)| = 0$ und $f(z) = f_h(z) + f_n(z)$ für alle $z \in K_{r,s}(a)$. Man nennt f_h den Hauptteil und f_n den Nebenteil der Funktion f.

Definition der Laurentreihen

Definition

- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$, dann bezeichnet man einen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

  als Laurentreihe im Entwicklungspunkt a.

- Ist $z \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man die Laurentreihe als (absolut) konvergent im Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn die Reihen

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z_1-a)^n \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_1-a)^{-n}$$

  und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-a)^n$ beide (absolut) konvergieren.

Laurentreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen

Satz (5.7)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq +\infty$. Sei $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{für alle} \quad z \in K_{r,s}(a).$$

Der Hauptteil von f ist gegeben durch $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$, und der Nebenteil ist gegeben durch $f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ für alle $z \in B_s(a)$.

Integraldarstellung der Entwicklungskoeffizienten

Die Koeffizienten a_n der Laurentreihenentwicklung können für jedes $n \in \mathbb{Z}$ jeweils durch das Integral

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw$$

berechnet werden, wobei der Kreisradius ρ in $]r, s[$ beliebig gewählt werden kann. (Dieselbe Formel hatten wir für holomorphe Funktionen auf offenen Kreisscheiben und $n \geq 0$ bereits in § 3 aufgestellt.)

Klassifikation der isolierten Singularitäten

Definition (5.8)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Einen isolierten Punkt a der Menge $\mathbb{C} \setminus U$ nennt man isolierte Singularität. Genauer bezeichnet man a als

(i) hebbar, wenn $f|_{V \cap U}$ für eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a beschränkt ist,

(ii) Polstelle, wenn $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$ gilt, und als

(iii) wesentliche Singularität, wenn sie weder hebbar noch eine Polstelle ist.

Beweis der Formel für die Laurentreihen-Koeff

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(z-a)^{-n-1} f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-a)^{k-n-1} =$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k+n+1} (z-a)^k = \sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k+n+1} (z-a)^k +$$

$$a_n (z-a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} (z-a)^k$$

Die beiden Reihen konvergieren auf $B_\rho(a)$ gleichmäßig $\Rightarrow$ Integration und Summation ve-

$a_n (z-a) \quad \sum_{k=0} a_{k+n+1} (z-a)$

Die beiden Reihen konvergieren auf $B_\rho(a)$

tauschbar $\Rightarrow \int_{B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw =$

$$\sum_{k=-\infty}^{-2} a_{k+n+1} \int_{B_\rho(a)} (w-a)^k dw + a_n \int_{B_\rho(a)} \frac{dw}{w-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k+n+1} \int_{B_\rho(a)} (w-a)^k dw$$

Cauchyscher Integralsatz $\Rightarrow \int_{B_\rho(a)} (w-a)^k dw = 0 \quad \forall k \geq 0$

Für $k \leq -2$ besitzt der Integrand $(w-a)^k$ die komplexe Stammfkt. $\frac{1}{k+1}(w-a)^{k+1}$ Folgerung 2.10 $\Rightarrow$

$\int_{B_\rho(a)} (w-a)^k dw = 0 \quad \forall k \leq -2$

Cauchysche Integralformel $\Rightarrow \int_{B_\rho(a)} \frac{dw}{w-a} = 2\pi i$

insgesamt: $\displaystyle\int_{B_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw = 2\pi i \, a_n$ $\square$

Beispiele für Singularitäten:

(i) $f: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z}{z}$

(äquivalent: $z \mapsto 1$)

$g: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{\sin(z)}{z}$

haben in 0 eine hebbare Singularität

(ii) $f: \mathbb{C}\setminus\{1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z-1}$

hat eine Polstelle in $z=1$

Be

$\Rightarrow$

" V

g:

a isol

nerng

$= \{a$

Wähle e

von a

prinzip

(iii) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto e^{1/z}$

hat in $z = 0$ eine wesentliche Singularität

$$z_n = \frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} e^{1/z_n} = \lim_{n\to\infty} e^{n} = +\infty$$

$$z_n = -\frac{1}{n} \implies \lim_{n\to\infty} e^{1/z_n} = \lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$$

$$z_n = \frac{i}{n} \implies \lim_{n\to\infty} \left| e^{1/z_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| e^{-in} \right| = 1$$

Riemannscher Hebbarkeitssatz

Satz (5.9)

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Eine isolierte Singularität a ist genau dann hebbar, wenn f auf $U \cup \{a\}$ holomorph fortsetzbar ist.

Beweis von Satz 5.9.

„$\Rightarrow$" Vor.: Es gibt eine offene Umg V von a und eine holomorphe Fkt. $g: V \to \mathbb{C}$, so dass $g|_{V \cap U} = f|_{V \cap U}$

a isolierte Sing. $\Rightarrow$ können nach Verkleinerung von V annehmen, dass $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$, d.h. $V \subseteq U \cup \{a\}$.

Wähle eine bel. kompakte Umg. $C \subseteq V$ von a. g ist in a stetig, Maximumsprinzip $\Rightarrow$ $g|_C$ ist beschränkt

$\Rightarrow f|_{\mathbb{C}\setminus\{a\}}$ ist beschränkt

$\Rightarrow$ a ist hebbare Singularität

„$\Leftarrow$" Sei $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umg. von a mit $V \cap (\mathbb{C}\setminus U) = \{a\}$, d.h. $V \subseteq U \cup \{a\}$ (existiert, da a isoliert)

N.V. können wir V so klein wählen, dass $f|_{V\setminus\{a\}}$ beschränkt ist.

Definiere $g: V \to \mathbb{C}$ auf

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & \text{für } z \in V\setminus\{a\} \\ 0 & \text{für } z = a \end{cases}$$

Da f auf $V\setminus\{a\}$ beschränkt ist, gilt $\lim_{z \to a} g(z) = 0$, d.h. g ist in a stetig

außerdem: g auf $V \setminus \{a\}$ hol. $\underset{\text{Prop 5.3}}{\Rightarrow}$ g holomorph

Betrachte nun

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} & \text{für } z \in V \setminus \{a\} \\ g'(a) & \text{für } z = a \end{cases}$$

g ist in a hol. $\Rightarrow \lim_{z \to a} h(z) = g'(a) = h(a)$, d.h.

h ist in a stetig, auf $V \setminus \{a\}$ hol. $\overset{\text{Prop. 5.3}}{\Longrightarrow}$

h ist auf V hol., außerdem gilt $\forall z \in V \setminus \{a\}$:

$$h(z) = \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \frac{g(z)}{z - a} = \frac{(z-a) f(z)}{z - a} = f(z)$$

$\Rightarrow$ h ist holomorphe Fortsetzung von f $\square$

Charakterisierung der Polstellen

Satz (5.10)

Genau dann ist $a \in \mathbb{C}$ eine Polstelle von f, wenn es eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$, ein $n \in \mathbb{N}$ und eine holomorphe Funktion $h : V \to \mathbb{C}$ mit

$$h(a) \neq 0 \qquad \text{und} \qquad f(z) = (z-a)^{-n} h(z)$$

für alle $z \in V \setminus \{a\}$ gibt. Man bezeichnet die Zahl n als die Ordnung der Polstelle a; sie ist durch f eindeutig bestimmt.

Beweis von Satz 5.10

„$\Rightarrow$" Wähle eine offene Umg. V von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$. Nach Verkleinerung von V können wir annehmen, dass $f|_{V \setminus \{a\}}$ auch keine Nullstelle hat wegen $\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$. $\Rightarrow$ erhalte durch $g(z) = f(z)^{-1}$ eine hol. Fkt. auf $V \setminus \{a\}$ $\lim_{z \to a} |g(z)| = 0 \Rightarrow g$ kann in a durch 0 stetig fortgesetzt werden. Prop. 5.3 $\Rightarrow g$ ist auf V holomorph. Prop 4.2.(iii) $\Rightarrow$ Nach Verkleinerung von V existiert auf V eine hol. Fkt. $\hat{h}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g(z) = (z-a)^n \hat{h}(z)$ mit $\hat{h}(z) \neq 0 \ \forall z \in V$. Definiere $h(z) = \hat{h}(z)^{-1} \ \forall z \in V$

$\dots \neq 0 \; \forall z \in V$. Definiere $h(z) = \tilde{h}(z) \; \forall z \in V$

$\Rightarrow f(z) = (z-a)^{-n} h(z) \quad \forall z \in V \setminus \{a\}$

Eindeutigkeit: Ang. Es gibt $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und hol. Fkt $h, h_1 : V \to \mathbb{C}$ mit $h_1(a), h(a) \neq 0$ und

$$(z-a)^{-m} h(z) = f(z) = (z-a)^{-n} h_1(z) \quad \forall z \in V \setminus \{a\}$$

(V Umg. von a mit $V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$)

$$(z-a)^{n-m} h(z) = h_1(z) \quad \forall z \in V \setminus \{a\}$$

$$\Rightarrow h_1(a) \underset{\substack{\uparrow \\ h_1 \text{ stetig}}}{=} \lim_{z \to a} h_1(z) = \lim_{z \to a} \underbrace{(z-a)^{n-m}}_{\to 0} h(z) = 0$$

$\lightning$ zu $h_1(a) \neq 0$

"$\Longleftarrow$": Vor: $\exists$ Umg. V von a mit
$V \cap (\mathbb{C} \setminus U) = \{a\}$ und eine hol. Fkt $h: V \to \mathbb{C}$
sowie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = (z-a)^{-n} \cdot h(z)$
$\forall z \in V \setminus \{a\}$ und $h(a) \neq 0$.

z.zg.: a ist Polstelle von f, d.h.

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = +\infty$$

$h(a) \neq 0$, h ist stetig in a $\to \lim_{z \to a} h(z) \neq 0$

außerdem: $\lim_{z \to a} |(z-a)^{-n}| = +\infty$

insgesamt: $\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} |(z-a)^{-n}| \cdot |h(z)| = +\infty$ $\square$

$\Rightarrow f|_{\mathbb{C} \setminus \{a}$ …
$\Rightarrow a$ ist …
"$\Longleftarrow$": Sei …
von a mit …
$V \subseteq U \cup \{$ …
N.V. können …
dass $f|_V$ …
Definiere …
$g(z) = \{$ …
Da f an …
von a g ist in a st…
prinzip $\Rightarrow g|_{\mathbb{C}}$ ist …

(ii) $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-1}$
Polstelle in $z = 1$

Definition der meromorphen Funktionen

Definition (5.11)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge. Eine meromorphe Funktion auf U ist eine holomorphe Funktion $f : V \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Teilmenge $V \subseteq U$ mit der Eigenschaft, dass die Punkte in $U \setminus V$ alles Polstellen, also insbesondere isolierte Singularitäten, der Funktion f sind.

Bestimmung der Singularität durch die Laurentreihenentwicklung

Satz (5.12)

Sei $a \in \mathbb{C}$ eine isolierte Singularität von $f : U \to \mathbb{C}$, und seien r, s positive reelle Zahlen mit $r < s$ und $B_s(a) \subseteq U \cup \{a\}$. Sei ferner

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

die Laurentreihen-Entwicklung von f auf dem Kreisring $K_{r,s}(a)$.

(i) Die Singularität a ist genau dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$ gilt.

(ii) Sie ist eine Polstelle der Ordnung n genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < -n$ gilt.

(iii) Sie ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist.

Beweis von Satz 5.12:

$f: U \to \mathbb{C}$ hol, $a \in \mathbb{C}$ isolierte Singularität

$r, s \in \mathbb{R}^+$, $r < s$, $B_s(a) \subseteq U \cup \{a\}$

Laurentreihen-Entw. von f auf $K_{r,s}(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n \qquad (*)$$

zu (i) z. zg.: a hebbar $\iff a_n = 0 \ \forall n < 0$

„$\Leftarrow$" Vor. $\Rightarrow$ $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ ist hol

Fortsetzung von f auf $B_s(a)$, insb. ist f

Fortsetzung von f auf $B_s(a)$, insb. ist f

in a hol. fortsetzbar $\overset{5.9}{\Longrightarrow}$ a ist hebbare Sing.

"$\Longrightarrow$" f auf $B_s(a) \setminus \{a\}$ hol., hat somit eine

Laurentreihen-Entw. auf $K_{0,s}(a) = B_s(a) \setminus \{a\}$

Durch Einschränkung erhält man eine Laurentr.-

darst. auf $K_{r,s}(a)$ Eindeutigkeit $\Rightarrow$ $(*)$ ist

auf $K_{0,s}(a)$ gültig. d.h. o.B.d.A. $r = 0$

a hebbar $\overset{(5.9)}{\Longrightarrow}$ f besitzt hol. Forts. h auf $B_s(a)$

Diese hat eine Potenzreihendarst., erhalten eine

neue Laurentr.-darst. von f auf $K_{0,s}(a)$

Eindeutigkeit $\Rightarrow a_n = 0 \ \forall n < 0$

zu 1(ii) z.zg.: a Polst. der Ordnung n

$\Longleftrightarrow a_{-n} \neq 0,\ a_k = 0 \ \forall k < -n$

„$\Longleftarrow$" $(*) \Rightarrow f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} a_k (z-a)^k$

$= (z-a)^{-n} \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^{k+n}$

$= (z-a)^{-n} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-a)^k}_{=h(z)}$

$\Rightarrow$ erhalte eine hol. Fkt. h auf $B_\delta(a)$

mit $h(a) = a_{-n} \neq 0$ und

E

a

ins

$f(z) = (z-a)^{-n} h(z) \quad \forall z \in K_{r,s}(0)$,
wobei o.B.d.A. wieder $r=0$ gesetzt werden kann. Satz 5.10 $\Rightarrow$ f hat in a Pol n-ter Ordn.

„$\Longrightarrow$" Satz 5.10 $\Rightarrow$ $\exists$ eine hol. Fkt. $h: V \to \mathbb{C}$ auf einer Umg. V von a mit $(\mathbb{C} \setminus U) \cap V = \{a\}$ mit $h(a) \neq 0$ und $f(z) = (z-a)^{-n} h(z)$ $\forall z \in V \setminus \{a\}$. O.B.d.A. $r=0$, s so klein, dass $B_s(a) \subseteq V$. Sei $h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$ eine PR-Entw. von h auf $B_s(a)$ $\Rightarrow$ erhalte für alle $z \in V \setminus \{a\}$: $f(z) = (z-a)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^k$

mit $h(a) = a_{-n} \neq 0$ und

$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-a)^{k-n} = \sum_{k=-n}^{\infty} b_{k+n} (z-a)^k$$

Eindeutigkeit der Laurent.-entw. $\rightarrow$

$a_k = 0$ für $k < -n$, $a_k = b_{k+n}$ $\forall k \geq -n$

insb. $a_{-n} = b_0 = h(a) \neq 0$. $\square$