Satz von der Gebietstreue

Satz (4.9)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch die Bildmenge $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Das Maximusprinzip für holomorphe Funktionen

Satz (4.10)

Sei G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ von f in einem Punkt $a \in G$ ein lokales Maximum besitzt, dann ist f auf G konstant.

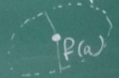
Beweis von Satz 4.10:

geg $G \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ nicht-konstant, holomorph. Ann.: Es gibt ein $a \in G$, in dem $|f(z)|$ maximal wird

Wähle $r \in \mathbb{R}^+$ so, dass $B_r(a) \subseteq G$ und

$|f(a)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in B_r(a)$

$B_r(a) \subseteq G$ ist Gebiet. Gebietstreue $\Rightarrow$ $f(B_r(a))$



$f(B_r(a))$ ist Gebiet, insb. offen.

Aus der Offenheit von $f(B_r(a))$

folgt, dass auch Punkte w mit $|w| > |f(a)|$ in $f(B_r(a))$ liegen d.h. $\exists z \in B_r(a)$ mit $|f(z)| > |f(a)|$ ↯

$\square$

§ 5. Isolierte Singularitäten

Definition (5.1)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r, s \in \mathbb{R}^+$ mit $r < s$. Dann ist der Kreisring um a mit den Radien r und s definiert durch
$K_{r,s}(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - a| < s\}$.

Wir definieren auch

$$K_{0,r}(a) = B_r(a) \setminus \{a\} \quad \text{und} \quad K_{r,+\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$$

für jedes $r \in \mathbb{R}^+$, außerdem $K_{0,+\infty}(a) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Cauchyscher Integralsatz für Kreisringe

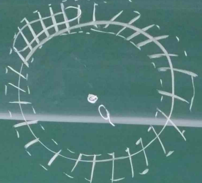
Satz (5.2)

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $K = K_{r,s}(a)$ mit $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$ und jede holomorphe Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ jeweils

$$\int_{\partial B_\sigma(a)} f(z)\, dz \quad = \quad \int_{\partial B_\rho(a)} f(z)\, dz.$$

Kreisring

$$K_{r,s}(a) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < s \}$$



Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für Kreisringe

Erinnerung: $f: U \to \mathbb{C}$ hol. Fkt., γ, δ geschlossene Kurven in U, zwischen denen eine

B

Vor

wol

Wähl

z. B.

$\exists$ kon

Satz

Illustr

Homotopie existiert, dann

gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\delta f(z)\,dz$

hier: $U = K_{r,s}(a)$, $\gamma = \partial B_\rho(a)$,

$\delta = \partial B_\sigma(a)$, wobei $r < \rho < \sigma < s$

Definiere eine Homotopie zwischen

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $s \mapsto a + \rho e^{is}$

$\delta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $s \mapsto a + \sigma e^{is}$

Definiere $H : [0, 2\pi] \times [0,1] \to \mathbb{C}$

durch $H(s,t) = a + ((1-t)\rho + t\sigma) e^{is}$

$\Rightarrow$ Kurvenintegrale gleich nach Prop. 2.12 $\square$

Bew

geg

defi

klar:

$K \setminus \{$

g is

Inte

$\Rightarrow \int$

∂B

$\overset{(5.2)}{=}$

Holomorphe Fortsetzung in einem Punkt

Proposition (5.3)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige, auf $U \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion, dann ist f auf ganz U holomorph.

Beweis von Prop. 5.3:

Vor.: $f: U \to \mathbb{C}$ stetig, auf $U \setminus \{z\}$ holomorph wobei $z \in U$

Wähle von z eine sternförmige Umgebung in U, z.B. eine Kreisscheibe. Prop. 2.8 $\Rightarrow$ $\exists$ komplexe Stammfkt. von f auf dieser Umg. Satz 3.5 (iii) $\Rightarrow$ f ist holomorph. $\square$

Illustration von Satz 5.4

Cauchysche Integralformel für Kreisringe

Satz (5.4)

Sei $a \in \mathbb{C}$, $K = K_{r,s}(a)$ mit $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gilt für alle $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ mit $r < \rho < \sigma < s$, jede holomorphe Funktion $f : K \to \mathbb{C}$ und jeden Punkt $z \in K$ mit $\rho < |z - a| < \sigma$ jeweils

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w - z} \, dw.$$

Beweis von Prop

$< s$

fun

is

e^{is}

$\to \mathbb{C}$

$)e^{is}$

op. 2.12 $\square$

Beweis von Satz 5.4.

geg. $z \in \mathbb{C}$ mit $\rho < |z-a| < \delta$

definiere $g: K \to \mathbb{C}$, $w \mapsto \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{für } w \neq z \\ f'(z) & \text{für } w = z \end{cases}$

Vor. g ist auf K stetig, auf $K \setminus \{z\}$ holomorph Prop 5.3 $\Longrightarrow$

g ist auf K holomorph $\Rightarrow$ Cauchyscher Integralsatz (5.2) anwendbar

$$\Rightarrow \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z} = \int_{\partial B_\rho(a)} g(w)\,dw$$

$$\overset{(5.2)}{=} \int_{\partial B_\delta(a)} g(w)\,dw = \int_{\partial B_\delta(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\partial B_\delta(a)} \frac{dw}{w-z}$$

Gebietstreue $\Rightarrow$ $f(B_r(a))$

$\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{dw}{w-z} = 0$ da $z \notin \overline{B_\rho}(a)$ (herkömmlicher Cauchy-scher Integralsatz für sternförmige Gebiete)

$\int_{\partial B_\delta(a)} \frac{dw}{w-z} = 2\pi i$ wg Cauchyscher Integralformel angew. auf die konstante Fkt. 1 einsetzen

$$\to \int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z)\cdot 0 = \int_{\partial B_\delta(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - 2\pi i f(z). \qquad \square$$

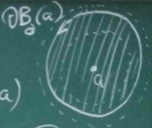
Löse diese Gleichung nach $f(z)$ auf.

Satz über holomorphe Funktionen auf Kreisringen

Satz (5.5)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq +\infty$. Dann gibt es für jede holomorphe Funktion $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ jeweils eindeutig bestimmte, holomorphe Funktionen $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ und $f_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z| \to +\infty} |f_h(z)| = 0$ und $f(z) = f_h(z) + f_n(z)$ für alle $z \in K_{r,s}(a)$. Man nennt f_h den Hauptteil und f_n den Nebenteil der Funktion f.

Beweis von Satz 5.5.



geg $f: K \to \mathbb{C}$ holomorph auf $K = K_{r,s}(a)$

z.zg.: $\exists\, f_n: B_s(a) \to \mathbb{C}$, $f_h: \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$

mit $\lim_{|z| \to +\infty} f_h(z) = 0$ und $\boxed{f = f_h + f_n}$

Prop 3.1 $\Rightarrow$ erhalte für jedes $\sigma \in \,]r,s[$ eine hol. Fkt.

auf $B_\sigma(a)$ durch $z \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$

außerdem: $\sigma_1, \sigma_2 \in \,]r,s[$ mit $\sigma_1 < \sigma_2$ $\Rightarrow$ erhalte

für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < \sigma_1$ die Übereinstimmung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\sigma_1}(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\sigma_2}(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw,$$ nach (5.2)

Prop 5.1 $\Rightarrow$ erhalte für jedes $\vartheta \in \,]r,s[$ eine hol. Fkt.

$\Rightarrow$ erhalte auf ganz $B_s(a)$ eine hol Fkt., indem für geg $z \in B_s(a)$ ein $\vartheta \in \,]r,s[$ mit $|z-a| < \vartheta$ gewählt und z der Wert $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\vartheta(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$ zugeordnet wird

ebenso: Für jedes $\rho \in \,]r,s[$ erhalte eine hol. Fkt. auf $\mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a)$ durch $z \mapsto -\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{B}_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

Bezeichne diese Fkt mit $f_{h,\rho} : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$

Nach (5.2) gilt $f_{h,\rho_1}(z) = f_{h,\rho_2}(z)$ falls $\rho_1 < \rho_2 < |z-a| < s$. $\Rightarrow$ erhalte eine hol Fkt. $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$, indem für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ ein ρ mit $\rho < |z-a|$ gewählt und $f_h(z) = f_{h,\rho}(z)$ gesetzt

wird. Insgesamt erhalten wir
für alle $\rho, \sigma \in \,]r, s[$ hol. Fkt.
$f_{h,\rho} : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a) \to \mathbb{C}$, $f_{n,\sigma} : B_\sigma(a)$
$\to \mathbb{C}$, $f_h : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$,
$f_n : B_s(a) \to \mathbb{C}$, wobei

$$f_n(z) = f_{n,\sigma}(z) \quad \forall z \in B_\sigma(a)$$

$$f_h(z) = f_{h,\rho}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_\rho(a)$$

<u>Beh</u>: (1) $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f_h(z) = 0$

(2) $f(z) = f_h(z) + f_n(z) \quad \forall z \in K$

<u>zu</u> (

mit

f_h (z

$\frac{1}{2\pi i}$

$= f$ (

zur Ein

Ang g

sind el

$\lim$ g

zu (1) Wähle $\rho \in]r,s[$ beliebig

$\Rightarrow$ erhalte für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| > \rho$ jeweils
$$f_h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_{\rho}(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

$f(w)$ ist auf $\partial B_\rho(a)$ beschränkt.

$\frac{1}{|w-z|} \to 0$ für $|z| \to +\infty$

$\Rightarrow$ Der Integrand $\frac{f(w)}{w-z}$ läuft für $w \in \partial B_{\rho}(a)$ für $|z| \to +\infty$ gleichmäßig gegen 0. Aus Lemma 3.6 folgt, dass das Integral dann auch gegen null läuft.

z

Auf K

$\Rightarrow$ f

$\forall z \in$

$\Rightarrow$ erhal

eine ganz

Diese erfüll

$u(z)$ ist bes

Liouville $\Rightarrow$

Die Konstante

$\Rightarrow f_h = g_h$ au

zu (2) Sei $z \in K$ vorgeg. Wähle $\rho, \sigma \in]r, s[$ mit $\rho < |z-a| < \sigma$ $\to$ erhalte

$$f_1(z) + f_2(z) = f_{1,\sigma}(z) + f_{2,\rho}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\sigma(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \overset{(5.4)}{=} f(z)$$

zur Eindeutigkeit:

Ang. $g_1 : B_s(a) \to \mathbb{C}$, $g_2 : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ sind ebenfalls hol. Fkt. mit $\lim_{|z| \to \infty} g_2(z) = 0$, $f(z) = g_1(z) + g_2(z) \ \forall z \in K$

z.zg: $f_h = g_h$, $f_n = g_n$

Auf K gilt $g_h(z) + g_n(z) = f(z) = f_h(z) + f_n(z)$

$\Rightarrow f_h(z) - g_h(z) = g_n(z) - f_n(z)$

$\forall z \in K$

$\Rightarrow$ erhalte durch $u(z) = \begin{cases} f_h(z) - g_h(z) & \text{f. } |z-a| > r \\ g_n(z) - f_n(z) & \text{f. } |z-a| < s \end{cases}$

eine ganze Fkt.

Diese erfüllt $\lim\limits_{|z| \to +\infty} u(z) \overset{(*)}{=} 0. \Rightarrow$

$u(z)$ ist beschränkte hol. Fkt auf $\mathbb{C}$

Liouville $\Rightarrow$ u ist konstant $(*) \Rightarrow$

Die Konstante muss null sein.

$\Rightarrow f_h = g_h$ auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(a)$, $f_n = g_n$ auf $B_s(a)$ $\square$

Potenzreihenentwicklung des Hauptteils

Lemma (5.6)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$ und $f : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{-n}$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$.

Beweis von Lemma 5.6

geg. $f : \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a) \to \mathbb{C}$ hol., $\lim\limits_{|z| \to +\infty} f(z) = 0$ (*)

Betrachte die Abb. $\mathbb{C} \setminus \{a\} \xrightarrow{\iota} \mathbb{C}^*$, $z \mapsto \frac{1}{z-a}$

(ist bijektiv, mit Umkehrabb. $w \mapsto \frac{1}{w} + a$)

Die Abb. ι liefert durch Einschränkung eine Bij.

$\mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$ auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$ wegen

$|z-a| > r \iff \left|\frac{1}{z-a}\right| < \frac{1}{r}$ $\to$

$\hat{f} = f \circ \iota^{-1}$ ist hol. Fkt. auf $B_{1/r}(0) \setminus \{0\}$

Aus (*) folgt $\lim\limits_{z \to 0} \hat{f}(z) = 0$.

$\ldots_r(0)\setminus\{0\}$ wegen

$|z-a|>r \iff \left|\frac{1}{z-a}\right|<\frac{1}{r} \Longrightarrow$

Setzen wir $\tilde{f}$ auf $B_{1/r}(0)$ durch $\tilde{f}(0)=0$ fort, so ist $\tilde{f}$ auf $B_{1/r}(0)$ stetig, auf $B_{1/r}(0)\setminus\{0\}$ holomorph. Prop. (5.3) $\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ auf $B_{1/r}(0)$ hol.

Satz über die Potenzreihenentw. $\Longrightarrow$ $\exists$ Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\tilde{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z\in B_{1/r}(0)$

$\tilde{f}(0)=0 \Longrightarrow a_0=0$

$$\Longrightarrow f(z) = (\tilde{f}\circ\iota)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \,\iota(z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{-n} \quad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\overline{B_r(a)}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Potenzreihenentw. von $\tilde{f}$. $\square$

Definition der Laurentreihen

Definition

- Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$, dann bezeichnet man einen Ausdruck der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

  als Laurentreihe im Entwicklungspunkt a.

- Ist $z \in \mathbb{C}$, so bezeichnet man die Laurentreihe als (absolut) konvergent im Punkt $z_1 \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn die Reihen

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z_1-a)^n \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z_1-a)^{-n}$$

  und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-a)^n$ beide (absolut) konvergieren.

Laurentreihenentwicklung holomorpher Funktionen auf Kreisringen

Satz (5.7)

Seien $a \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq +\infty$. Sei $f : K_{r,s}(a) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Familie $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen mit

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{für alle} \quad z \in K_{r,s}(a).$$

Der Hauptteil von f ist gegeben durch $f_h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{B}_r(a)$, und der Nebenteil ist gegeben durch $f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ für alle $z \in B_s(a)$.