

§ 4. Anwendungen des Integralsatzes und der Integralformel

Definition (4.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion f besitzt in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine **Nullstelle der Ordnung n** , wenn

$$f^{(k)}(w) = 0 \text{ für } 0 \leq k < n \quad \text{und} \quad f^{(n)}(w) \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

Man sagt, ein Wert $a \in \mathbb{C}$ wird von f in w **mit Vielfachheit n** angenommen, wenn die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ in w eine Nullstelle der Ordnung n besitzt. Von einer Nullstelle der Ordnung ∞ in w spricht man, wenn $f^{(n)}(w) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Äquivalente Charakterisierungen der Nullstellenordnung

Proposition (4.2)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in U$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion f besitzt in w eine Nullstelle der Ordnung n .
- (ii) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq n}$ komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ und

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - w)^k \quad \text{für alle } z \in B_r(w).$$

- (iii) Es gibt eine offene Umgebung V von w mit $V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion g auf V mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) = (z - w)^n g(z)$ für alle $z \in V$.

Beweis von Prop. 4.2:

„(iii) $\Rightarrow$ (i)“ Zeige durch Vollst. Ind. über $n \in \mathbb{N}_0$:

Ist $V \subset U$ offene Umg. von w , $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph der Form
 $f(z) = (z-w)^n g(z)$, $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $g(w) \neq 0$, dann
ist w eine Nullst. der Ordnung von f .

Ind.-Anf. $n=0$: Dann gilt $f(w) = g(w) \neq 0$.

Ind.-Schritt $n \mapsto n+1$: Setze die Implikation für n voraus.

Seien $f, g: V \rightarrow \mathbb{C}$ hol., $f(z) = (z-w)^{n+1} g(z)$, $g(w) \neq 0$.

$$\begin{aligned} \text{Produktregel} &\Rightarrow f'(z) = (n+1)(z-w)^n g(z) + (z-w)^{n+1} g'(z) \\ &= (z-w)^n h(z) \text{ mit } h(z) = (n+1)g(z) + (z-w)g'(z) \end{aligned}$$

Die Fkt. h ist hol. auf V , und $h(w) = (n+1)g(w) + (w-w)g'(w)$
 $= (n+1)g(w) \neq 0$. Ind.-V. angewendet auf $f' \Rightarrow w$ Nullst. n -ter

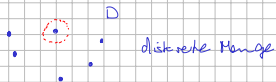
Ordnung von $f' \Rightarrow f^{(k)}(w) = 0$ für $1 \leq k \leq n$, $f^{(n+1)}(w) = 0$
außerdem $f^{(0)}(w) = f(w) = (w-w)^{n+1} g(w) = 0$. $\square$

Definition diskreter Mengen

Definition (4.3)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine beliebige Teilmenge. Ein Punkt $p \in D$ wird **isolierter Punkt** von D genannt, wenn eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{C}$ von p mit $D \cap V = \{p\}$ existiert. Eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, die nur aus isolierten Punkten besteht, wird **diskrete Teilmenge** von $\mathbb{C}$ genannt.

Illustration der Begriffe „isolierter Punkt“, „diskrete Menge“



Der Identitätssatz (Permanenzprinzip)

Satz (4.4)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein nichtleeres Gebiet, und seien f und g holomorphe Funktionen auf G . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) $f = g$
- (ii) Es gibt einen Punkt $w \in G$, so dass die Funktion $h = f - g$ in w eine Nullstelle unendlicher Ordnung besitzt.
- (iii) Es gibt eine nicht-diskrete Teilmenge $N \subseteq G$ mit $f|_N = g|_N$.

Beweis von Satz 4.4: $G \subseteq \mathbb{C}$ nichtleeres Gebiet, f, g holomorph auf G

"(i) $\Rightarrow$ (iii)" Vor.: $f = g$ z.z.g.: $\exists N \subseteq G$ nichtdiskret mit $f|_N = g|_N$
Sei $z \in G$. G offen $\Rightarrow \exists \epsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\epsilon(z) \subseteq G$. Daraus folgt, dass in jeder bel. kleinen Umg. von z unendl. viele Punkte aus G liegen.
 $\Rightarrow N = G$ ist nichtdiskret. Teilmenge von G , $f|_N = g|_N$

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Vor.: $\exists N \subseteq G$ nichtdiskret mit $f|_N = g|_N$

Da N nichtdiskret ist, existiert ein $w \in N$ und eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$. Beh.: w ist Nullstelle unendl. Ordnung von $h = f - g$.
Ang.: w ist nur eine Nullstelle endl. Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$.

Dann gibt es nach Prop. 4.2 eine Umg. $W \subseteq G$ von w und eine auf W hol. Fkt. $u: W \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) = (z - w)^m u(z) \forall z \in W, u(w) \neq 0$.

O.B.d.A. liegen alle Glieder der Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in W . Es gilt

$$u(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n)}{(z_n - w)^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{(z_n - w)^m} = 0$$

u stetig im Punkt w $z_n \in W \forall n \in \mathbb{N}$ $f|_N = g|_N$ $\text{also } h|_N$

Also ist die Nullstellenordnung von h in w unendlich.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor.: $h = f - g$ besitzt eine Nullstelle $w \in G$ unendlicher Ordnung

z.z.g.: $h = 0$ auf ganz G ($\Rightarrow f = g$ auf ganz G)

Betrachte für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge $M_n = \{z \in G \mid h^{(n)}(z) = 0\}$.

Sei $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$. Es gilt $w \in M$. Beh.: (1) M ist abgeschlossene Teilmenge von G
(2) M ist offen in G

Weil G zusammenhängend ist, folgt daraus dann, dass $M = G$ und somit insb. $h(z) = 0 \forall z \in G$ gilt.

Bz (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $M_n = (h^{(n)})^{-1}(\{0\})$. $\{0\}$ ist abg. Teilmenge von $\mathbb{C}$, und $h^{(n)}$ ist hol., insb. stetig $\Rightarrow M_n$ ist abg. Teilmenge von G . Als Durchschnitt abg. Teilmengen ist auch M eine abg. Teilmenge von G .

z.z. (2) Sei $a \in M$ bel. vorgeg. $\Rightarrow h^{(n)}(a) = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$. Da h holomorph ist, existiert eine Kreisscheibe $B_\varepsilon(a)$, auf der h eine Potenzreihenentw.

$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ besitzt. Es gilt $a_n = \frac{h^{(n)}(a)}{n!} = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\Rightarrow h$ ist auf $B_\varepsilon(a)$ gleich null $\Rightarrow$ Alle höheren Ableitungen $h^{(n)}$ sind auf $B_\varepsilon(a)$ ebenfalls identisch null. $\Rightarrow B_\varepsilon(a) \subseteq M$

Da $a \in M$ bel. vorgeg. war, ist $M \subseteq G$ somit offen. $\square$

Die Cauchyschen Ungleichungen

Satz (4.5)

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(a) \subseteq U$, so dass die Funktion f auf $B_r(a)$ die Potenzreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ besitzt. Setzen wir

$$m = \max\{|f(z)| \mid z \in \partial B_r(a)\} \quad ,$$

dann gilt $|a_n| \leq \frac{m}{r^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis von Satz 4.5

$$\text{Satz 3.7} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

Der Betrag des Integranden kann betragsmäßig abgeschätzt werden durch $m \cdot r^{-(n+1)}$. Prop. 2.1 (ii) $\Rightarrow |a_n| \leq (2\pi r) \cdot (2\pi)^{-1} m r^{-(n+1)} = m r^{-n}$. $\square$

Der Satz von Liouville

Satz (4.6)

Eine ganze Funktion f mit der Eigenschaft, dass ihr Wertebereich $f(\mathbb{C})$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ beschränkt ist, ist **konstant**.

Beweis von Satz 4.6:

geg. hol. Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, f beschränkt, d.h. $\exists C \in \mathbb{R}^+$

mit $|f(z)| \leq C \forall z \in \mathbb{C}$ z.zg.: f ist konstant

Sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihenentw. von f um den Nullpunkt.

Satz 3.7 $\Rightarrow$ Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist unendlich.

Satz 4.5 $\Rightarrow |a_n| \leq C r^{-n} \forall n \in \mathbb{N} \forall r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow f(z) = a_0 \forall z \in \mathbb{C}$, d.h. f ist konstant

□

Der Fundamentalsatz der Algebra

Satz (4.7)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante **Polynomfunktion**, also eine Funktion der Form

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

wobei $n \geq 1$, $a_k \in \mathbb{C}$ für $0 \leq k \leq n$ und $a_n \neq 0$ ist. Dann besitzt f eine **Nullstelle** in $\mathbb{C}$.

Beweis von Satz 4.7:

Ang. f besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ erhalte durch $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)^{-1}$

eine ganze Fkt. Beh.: g ist beschränkt

Aus der Beh. folgt nach dem Satz von Liouville,
dass g konstant ist. Folglich ist dann auch f
konstant.

Beweis der Beh.: Definiere $h: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$h(z) = \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}. \Rightarrow f(z) = z^n (a_n + h(z))$$

Für $|z| \rightarrow +\infty$ gilt $\left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| \rightarrow 0$ ($0 \leq k \leq n-1$)

Es existiert also ein $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|h(z)| \leq \frac{1}{2} |a_n|$ für

alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r$. $\Rightarrow |f(z)| = |z^n a_n + z^n h(z)|$

$\geq |a_n| - |h(z)| |z^n| \geq \frac{1}{2} |a_n| r^n$ für $|z| > r$

$$\stackrel{\substack{|f(z)-a_n| \leq |z^{-n}| \\ \forall z, |z| \in \mathbb{C}}}{\Rightarrow} |g(z)| \leq 2|a_n|^{-1} r^{-n} \text{ für } |z| > r \quad (*)$$

Die Menge $\overline{B_r(0)} \subseteq \mathbb{C}$ ist kompakt, g ist stetig.

Maximumsprinzip $\Rightarrow g|_{\overline{B_r(0)}}$ ist beschränkt

Zusammen mit $(*)$ folgt, dass g auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist.

□

Existenz von Nullstellen in Kreisscheiben

Lemma (4.8)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $w \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(w) \subseteq U$. Sei außerdem $m = \min\{ |f(z)| \mid z \in \partial B_r(w) \}$. Gilt nun $|f(w)| < m$, dann besitzt f in $B_r(w)$ eine Nullstelle.

Satz von der Gebietstreue

Satz (4.9)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-konstante, holomorphe Funktion. Dann ist auch die Bildmenge $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.

Beweis von Satz 4.9:

geg.: Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

z.zg.: $f(G) \subseteq \mathbb{C}$ ist ein Gebiet

G ist zshgd., f ist stetig (als hol. Fkt.) $\Rightarrow f(G)$ ist zshgd.

Nachweis der Offenheit: Sei $a \in f(G)$, $w \in G$ mit $f(w) = a$.

Der Wert a wird nur auf einer diskreten Teilmenge von G von f angenommen. (Ansonsten wäre f auf einer nicht diskreten

Teilmenge gleich a ; nach dem Identitätssatz also konstant a .)

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R}^+$, so dass $\bar{B}_r(w) \subseteq G$ und $f|_{\bar{B}_r(w)}$ den Wert a nur in w annimmt

Beh.: $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(a) \subseteq f(\bar{B}_r(w)) \subseteq f(G)$

Betrachte $z \mapsto |f(z) - a|$, nimmt auf $\partial B_r(w)$ ein positiver

Minimum an. $\Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(z) - a| \geq 2\varepsilon \quad \forall z \in \partial B_r(w)$

Sei $b \in B_\varepsilon(a)$, betrachte $g(z) = f(z) - b$ auf $\bar{B}_r(w)$.

Es gilt jeweils $|f(z) - a| \leq |f(z) - b| + |b - a|$ und somit

$$|g(z)| = |f(z) - b| \geq |f(z) - a| - |b - a| \geq 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

für alle $z \in \partial B_r(w)$. $\Rightarrow \min \{|g(z)| \mid z \in \partial B_r(w)\} \geq \varepsilon$

Andererseits: $|g(w)| = |f(w) - b| = |a - b| < \varepsilon$.

Lemma 4.8 $\Rightarrow g(z) = f(z) - b$ hat Nullstelle in $B_r(w)$

$\Rightarrow \exists z \in B_r(w)$ mit $f(z) = b \Rightarrow b \in f(B_r(w)) \Rightarrow$ Beh. $\square$

Das Maximumsprinzip für holomorphe Funktionen

Satz (4.10)

Sei G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn der Betrag $|f|$ von f in einem Punkt $a \in G$ ein **lokales Maximum** besitzt, dann ist f auf G konstant.