§ 3. Die Cauchysche Integralformel

Notation:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ offene, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebige Teilmenge
- $f : U \times W \to \mathbb{C}$ Funktion, so dass $f_w : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z,w)$ reell differenzierbar für jedes $w \in W$
- Setze $\partial_z f(z,w) = \frac{\partial f_w}{\partial z}(z,w)$.
  Definiere entsprechend $\partial_{\bar{z}}$, ∂_x und ∂_y.

Proposition (3.1)

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f : U \times W \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Außerdem setzen wir voraus, dass $z \mapsto f(z,w)$ für jedes feste $w \in W$ eine stetige komplexe Ableitung besitzt. Sei $\gamma : [a,b] \to W$ ein Integrationsweg in W. Dann ist $F : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_\gamma f(z,w)\,dw$ eine holomorphe Funktion, und es gilt $F'(z) = \int_\gamma \partial_z f(z,w)\,dw$ für alle $z \in U$.

Integration über $\frac{1}{w-z}$

Proposition (3.2)

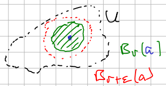
Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad 2\pi i.$$

Topologische Eigenschaft abgeschlossener Kreisscheiben

Lemma (3.3)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$, so dass die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{B}_r(a)$ in U liegt. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, so dass auch noch die offene Kreisscheibe $B_{r+\varepsilon}(a)$ in U enthalten ist.



Beweis von Lemma 3.3

geg.: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$, $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\overline{B}_r(a) \subseteq U$

z.z.: $\exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{r+\varepsilon}(a)$

Ang., ein solches ε existiert nicht. Dann existiert in $V = \mathbb{C} \setminus U$ eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|z_n - a| \leq r + \frac{1}{n}$ (da $B_{r+\frac{1}{n}}(a) \not\subseteq U$).

gesamte Folge in $\overline{B}_{r+1}(a)$ enthalten, abg. Kreisscheibe kompakt

Satz von Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow$ Nach Übergang zu einer Teilfolge ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent. Sei $z = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$. $|z_n - a| \leq r + \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $|z - a| = \lim\limits_{n \to \infty} |z_n - a| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \left(r + \frac{1}{n}\right) = r$ $\Rightarrow$ $z \in \overline{B}_r(a)$ $\Rightarrow$ $z \in U$ andererseits: $V = \mathbb{C} \setminus U$ ist abgeschlossen. Also muss der Grenzwert der in V liegenden Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls in V liegen. $\Rightarrow$ $z \in V$ $\Rightarrow$ $z \notin U$ ↯ $\square$

Die Cauchysche Integralformel

Satz (3.4)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(a) \subseteq U$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ die Gleichung

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw.$$

Die Werte von f im Inneren der Kreisscheibe sind also durch die Werte auf dem Rand festgelegt!

Beweis von Satz 3.4:

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_{r+\varepsilon}(a) \subseteq U$ (existiert nach Lemma 3.3).

$\Rightarrow G = B_{r+\varepsilon}(a)$ ist konvexes Gebiet, betrachte darauf die Fkt.

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } w \neq z \\ f'(z) & \text{falls } w = z \end{cases}$$

Diese ist auf $G \setminus \{z\}$ holomorph, auf G stetig (da f in z komplex diff'bar).

Wende den Cauchyschen Integralsatz auf G an (Satz 2.9).

$$\Rightarrow 0 = \int_{\partial B_r(a)} g(w)\,dw = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\,dw = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - f(z)\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} =$$

$$\int_{B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - 2\pi i\, f(z). \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad \square$$

Satz (3.5)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt

(i) Die Funktion f auf U beliebig oft komplex differenzierbar.

(ii) Ist $a \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $B_r(a) \subseteq U$ gilt, dann sind die höheren Ableitungen auf $B_r(a)$ gegeben durch

$$f^{(n)}(z) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \, dw$$

für alle $z \in B_r(a)$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Jede Funktion, die auf ihrem Definitionsbereich eine komplexe Stammfunktion besitzt, ist holomorph.

Beweis von Satz 3.5

zu (i) Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(a) \subseteq U$. genügt z.z.: f' ist auf $B_r(a)$ komplex diff'bar. Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in B_r(a)$$

Betrachte $g : B_r(a) \times \partial B_r(a) \to \mathbb{C}$, $(z, w) \mapsto \frac{f(w)}{w-z}$.
Die Fkt. ist stetig in w und stetig komplex diff'bar in z.
Prop. 3.1 $\Rightarrow$ f ist komplex diff'bar, $f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw$
Wiederum ist $\frac{f(w)}{(w-z)^2}$ stetig in w, stetig komplex diff'bar in w
erneute Anwendung von Prop. 3.1 $\Rightarrow$ f' auf $B_r(a)$ holomorph

zu (ii) Beweis der Gleichung durch vollst. Ind.
Ind.-Anf. $n = 0$ Gleichung entspricht der Cauchyschen Integralformel
Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}_0$, Ind.-V. $\Rightarrow$ $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$
$\forall z \in B_r(a)$ siehe Bew. von (i) $\Rightarrow$
erhalte $f^{(n+1)}(z) = (f^{(n)})'(z)$ durch Ableitung nach z unter dem Integralzeichen. Die komplexe Ableitung von $z \mapsto (w-z)^{-n-1}$ ist
$(-n-1)(-1)(w-z)^{-n-2} = (n+1)(w-z)^{-n-2}$ $\Rightarrow$

$$f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}(n+1) \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+2}}\, dw$$

zu (iii) Sei $F: U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfkt. von f.

Wende Teil (i) auf F an. $\Rightarrow$ $F' = f$ ist komplex diff'bar. $\square$

Konvergenz komplexer Kurvenintegrale

Lemma (3.6)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : U \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt für jede in U verlaufende Kurve γ jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz \quad = \quad \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Beweis von Lemma 3.6

Vor.: $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge stetiger Fkt., glm. konvergent gegen $f: U \to \mathbb{C}$. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. glm. Konvergenz $\Rightarrow$
$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : \forall z \in U : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$

Damit gilt für alle $n \geq N$

$$\left| \int_{\gamma_n} f_n(z)\,dz - \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,dz \underset{\text{Satz 2.1 (iii)}}{\leq} \varepsilon \cdot \ell(\gamma) \qquad \square$$

Satz von der Potenzreihenentwicklung

Satz (3.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei außerdem $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ gegeben durch $r = \sup\{s \in \mathbb{R}^+ \mid B_s(a) \subseteq U\}$. Dann gilt

(i) Die Funktion kann auf der offenen Kreisscheibe $B_r(a)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden. Es existiert also eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$, so dass für alle $z \in B_r(a)$ die Gleichung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ erfüllt ist. Dabei beträgt der Konvergenzradius der Potenzreihe mindestens r.

(ii) Die Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ der Potenzreihe sind eindeutig bestimmt und gegeben durch

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \, dw,$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $s \in]0, r[$ beliebig gewählt werden kann.

Beweis von Satz 3.7

Sei $s \in]0, r[$. Cauchysche Integralformel $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \text{für } z \in B_s(a)$$

Sei $z \in B_s(a)$ und $w \in \partial B_s(a)$. Es gilt

$$\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\cdot\frac{1}{w-a} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-z} \qquad |z-a| < s,\ |w-a| = s \Rightarrow \left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{f(w)}{w-a}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}f(w)$$

Beh.: Die Reihe konvergiert für jedes feste z in Abh. von $w \in \partial B_s(a)$ gleichmäßig gegen den Grenzwert $\frac{f(w)}{w-z}$. denn: f stetig auf $\partial B_s(a)$, $B_s(a)$ kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ Maximumsprinzip $\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(w)| \le C$ $\forall\, w \in \partial B_s(a)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\left|\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}f(w)\right| \le |z-a|^n s^{-n-1} C$, für alle $w \in \partial B_s(a)$. Es existiert also eine von s unabh. Abschätzung der Summanden. $\Rightarrow$ Beh.

Wende Lemma 3.6 über die Vertauschbarkeit von Integration mit gleichmäßiger Konvergenz an. $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_s(a)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}f(w)\right)dw \overset{\text{Lemma 3.6}}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_s(a)} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w)\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw \right)}_{=:\, a_n} (z-a)^n$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. in den Übungen und § 1 gezeigt: Die formale Ableitung der Potenzreihe liefert die höheren komplexen Ableitungen $f^{(n)}$ von f auf $B_s(a)$. Der Konvergenzradius bleibt dabei unverändert. Explizit ist die n-te formale Ableitung ggf. durch

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z-a)^k$$

Satz 3.5

Also gilt insb. $f^{(n)}(a) = n!\, a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$

Die Gleichung zeigt, dass das Integral $\int_{\partial B_s(a)} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw$ von $s \in]0, r[$ unabhängig ist. Somit ist die Potenzreihenentw. auf ganz $B_r(a)$ gültig, und der Konvergenzradius ρ muss $\geq r$ sein. $\square$

§ 4. Anwendungen des Integralsatzes und der Integralformel

Definition (4.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Funktion f besitzt in einem Punkt $w \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Ordnung n, wenn

$$f^{(k)}(w) = 0 \text{ für } 0 \le k < n \qquad \text{und} \qquad f^{(n)}(w) \neq 0 \quad \text{gilt.}$$

Man sagt, ein Wert $a \in \mathbb{C}$ wird von f in w mit Vielfachheit n angenommen, wenn die Funktion $z \mapsto f(z) - a$ in w eine Nullstelle der Ordnung n besitzt. Von einer Nullstelle der Ordnung ∞ in w spricht man, wenn $f^{(n)}(w) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Äquivalente Charakterisierungen der Nullstellenordnung

Proposition (4.2)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in U$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f besitzt in w eine Nullstelle der Ordnung n.

(ii) Es gibt ein $r \in \mathbb{R}^+$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq n}$ komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ und

$$f(z) \quad = \quad \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^k \qquad \text{für alle} \quad z \in B_r(w).$$

(iii) Es gibt eine offene Umgebung V von w mit $V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion g auf V mit $g(w) \neq 0$ und $f(z) = (z-w)^n g(z)$ für alle $z \in V$.

Beweis von Prop. 4.2:

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Wähle $r \in \mathbb{R}^+$ mit $B_r(w) \subseteq U$. Satz 3.7 $\Rightarrow$ f hat auf $B_r(w)$ die Potenzreihenentw. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-w)^k$, $a_k = \frac{f^{(k)}(w)}{k!}$ $\forall k \geq 0$

Nullst.-ordn. $\Rightarrow$ $f^{(k)}(w) = 0$ für $0 \leq k < n$, $f^{(n)}(w) \neq 0$

$\Rightarrow$ $a_k = 0$ für $0 \leq k < n$, $a_n \neq 0$

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Setze $V = B_s(w)$, betrachte die Gl. $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^k$ mit $a_n \neq 0$. Setze $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-w)^{k-n}$.

Dann gilt offenbar $f(z) = (z-w)^n \, g(z)$, $g(w) = a_n \neq 0$.