Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke *(nach E. Goursat)*

Satz (2.6)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\Delta \subseteq U$ ein Dreieck, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad 0.$$

Fehlende Holomorphie in einem Punkt

Proposition (2.7)

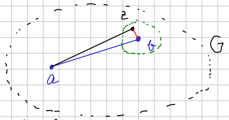
Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$ ein Dreieck, $a \in \Delta$ ein Punkt, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \Delta$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.

Komplexe Stammfunktion durch Wegintegrale

Proposition (2.8)

Sei G ein bezüglich des Punktes $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann ist durch $F : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^z f(w)\,dw$ eine komplexe Stammfunktion von f definiert.

Beweis von Prop. 2.8



Sei $b \in G$ vorgeg. G ist offen $\Rightarrow \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(b) \subseteq G$. Sei $z \in B_\varepsilon(b)$.

<u>Beh.:</u> Das Dreieck $\Delta = \Delta(a, b, z)$ ist in G enthalten.

Ist $p \in \Delta$, dann gibt es $\lambda, \mu, \nu \in [0,1]$ mit $p = \lambda a + \mu b + \nu z$, $\lambda + \mu + \nu = 1$.

OE $\lambda < 1$ (sonst $p = a$, $a \in G$ ist erfüllt)

$B_\varepsilon(b)$ ist konvex, $b, z \in B_\varepsilon(b) \Rightarrow w = \frac{\mu}{1-\lambda} b + \frac{\nu}{1-\lambda} z \in sp\,[b, z] \subseteq B_\varepsilon(b)$

Sternförmigkeit $\Rightarrow sp([a,w]) \subseteq G$ $\quad p = \lambda a + (1-\lambda) w \in sp\,[a, w] \Rightarrow p \in G$

($\Rightarrow$ Beh.)

Satz 2.6, angewendet auf $\Delta \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f(w)\, dw = 0$

$$\Rightarrow F(b) + \int_b^z f(w)\, dw - F(z) = \int_a^b f(w)\, dw + \int_b^z f(w)\, dw + \int_z^a f(w)\, dw = \int_{\partial\Delta} f(w)\, dw = 0$$

$$\Rightarrow F(z) - F(b) = \int_b^z f(w)\, dw = \int_0^1 f((1-t)b + tz)\cdot(z-b)\, dt = (z-b)\int_0^1 f((1-t)b + tz)\, dt$$

$$= (z-b)\, g(z) \quad \text{mit} \quad g(z) = \int_0^1 f((1-t)b + tz)\, dt$$

$\Rightarrow \lim_{z \to b} \frac{F(z) - F(b)}{z - b} = \lim_{z \to b} g(z)$ $\quad$ z.zg. also: $\lim_{z \to b} g(z) = f(b)$

Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $B_\varepsilon(b)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = b$. z.zg.: $\lim_{n\to\infty} g(z_n) = g(b)$

Es genügt z.zg., dass $[0,1] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto f((1-t)b + tz_n)$ als Funktionenfolge gleichmäßig gegen die konstante Fkt. $t \mapsto f(b)$ konvergiert, denn dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f((1-t)b + tz_n)\, dt = \int_0^1 f(b)\, dt = f(b).$$

Sei $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. f stetig in b $\Rightarrow$ $\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+ : |f(z) - f(b)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B_\delta(b)$

Sei $N \in \mathbb{N}$ so gew., dass $|z_n - b| < \delta \;\; \forall n \geq N$. Dann gilt auch

$|f((1-t)b + t z_n) - f(b)| < \varepsilon$ da $(1-t)b + t z_n \in sp[b, z_n] \subseteq B_\delta(b)$

Damit ist die glm. Konvergenz gezeigt. $\square$

Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete

Satz (2.9)

Sei G ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt für jede in G verlaufende, geschlossene Kurve γ jeweils

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Beweis von Satz 2.9:

Prop. 2.8 $\Rightarrow$ f hat auf G eine komplexe Stammfkt. F

$\Rightarrow$ Für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_\gamma f(z)\,dz = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) = (F \circ \gamma)(a) - (F \circ \gamma)(a) = 0. \square$$

Integralsatz $\Leftrightarrow$ Existenz komplexer Stammfunktionen

Folgerung (2.10)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Genau dann existiert für f eine komplexe Stammfunktion $F : G \to \mathbb{C}$, wenn $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G gilt.

Beweis von Folgerung 2.10:

„$\Rightarrow$" folgt aus Satz 2.1 (v) „$\Leftarrow$" Vor.: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G. Wähle einen bel. Punkt $a \in G$.

Sei $z \in G$. Satz 2.3 $\Rightarrow$ $\exists$ Polygonzug γ_z in G von a nach z

Definiere $F : G \to \mathbb{C}$ durch $F(z) = \int_{\gamma_z} f(z)\,dz$

z.zg.: F komplex diff'bar in z, $F'(z) = f(z)$

Wähle eine sternförmige Umg. $G_z \subseteq G$ von z. Prop. 2.8 $\Rightarrow$ $\tilde{F} : G_z \to \mathbb{C}$,

$z_1 \mapsto \int_z^{z_1} f(w)\,dw$ ist komplexe Stammfkt. von $f|G_z$

Beh.: F und $\tilde{F}$ stimmen auf G_z bis auf eine Konstante überein

denn: Sei $z_1 \in G_z$. $\Rightarrow$ $\gamma_z + [z, z_1] - \gamma_{z_1}$ ist geschl. Int.-weg in G

Vor. $\Rightarrow$ $F(z) + \tilde{F}(z_1) - F(z_1) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw + \int_z^{z_1} f(w)\,dw - \int_{\gamma_{z_1}} f(w)\,dw = 0$

$\Rightarrow$ Beh. Also folgt aus der kompletten Diff'barkeit von $\tilde{F}$ die komplexe Diff'barkeit von F, und die Gleichung $F'(z) = \tilde{F}'(z) = f(z)$ $\square$

Definition (2.11)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $\gamma, \delta : [a,b] \to G$ zwei Integrationswege.

(i) Ist $\gamma(a) = \delta(a)$ und $\gamma(b) = \delta(b)$, dann ist eine Homotopie in G zwischen γ und δ mit festen Endpunkten eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to G$, so dass $H(s,0) = \gamma(s)$ und $H(s,1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a,b]$ und $H(a,t) = \gamma(a) = \delta(a)$, $H(b,t) = \gamma(b) = \delta(b)$ für alle $t \in [0,1]$ erfüllt ist.

(ii) Sind γ und δ geschlossene Kurven, dann ist eine freie Homotopie in G zwischen γ und δ eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to G$ mit $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = \delta(s)$ für alle $s \in [a,b]$ und $H(a,t) = H(b,t)$ für alle $t \in [0,1]$

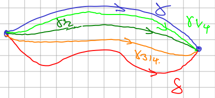
Das Gebiet G wird einfach zusammenhängend genannt, wenn jeder geschlossene Integrationsweg frei homotop zu einem konstanten Weg ist.

zur Interpretation des Homotopiebegriffs:

geg. Homotopie $H : [a,b] \times [0,1] \to G$ zwischen γ und δ

Betrachte für jedes $t \in [0,1]$ die Kurve $\gamma_t : [a,b] \to G$, $s \mapsto H(s,t)$.

$\Rightarrow \gamma_0 = \gamma$, $\gamma_1 = \delta$



Homotopieinvarianz der komplexen Wegintegrale

Proposition (2.12)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und seien $\gamma, \delta : [a, b] \to G$ zwei Integrationswege. Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Existiert zwischen γ und δ eine Homotopie mit festen Endpunkten oder sind γ und δ geschlossen, und existiert eine freie Homotopie zwischen γ und δ, dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz \quad = \quad \int_\delta f(z)\, dz.$$

Cauchyscher Integralsatz für einfach zusammenhägende Gebiete

Satz (2.13)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg in G.

§ 3. Die Cauchysche Integralformel

Notation:

- $U \subseteq \mathbb{C}$ offene, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebige Teilmenge
- $f : U \times W \to \mathbb{C}$ Funktion, so dass $f_w : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z, w)$ reell differenzierbar für jedes $w \in W$
- Setze $\partial_z f(z, w) = \frac{\partial f_w}{\partial z}(z, w)$.
  Definiere entsprechend $\partial_{\bar{z}}$, ∂_x und ∂_y.

Proposition (3.1)

Seien $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $W \subseteq \mathbb{C}$ beliebig und $f : U \times W \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Außerdem setzen wir voraus, dass $z \mapsto f(z, w)$ für jedes feste $w \in W$ eine stetige komplexe Ableitung besitzt. Sei $\gamma : [a, b] \to W$ ein Integrationsweg in W. Dann ist $F : U \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_\gamma f(z, w)\, dw$ eine holomorphe Funktion, und es gilt $F'(z) = \int_\gamma \partial_z f(z, w)\, dw$ für alle $z \in U$.

Beweis von Prop. 3.1:

Sei $z_0 \in U$ und $C \subseteq U$ eine kompakte Umgebung von z_0.

Betrachte die Abb. $\tilde{f} : U \times [a,b] \to \mathbb{C}$, $(z,t) \mapsto f(z, \gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$.

klar: $\tilde{f}$ ist stetig $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\tilde{f}$, $\mathrm{Im}\,\tilde{f}$ sind Lebesgue-int.'bar auf $[a,b]$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}$ ist integrierbar als $\mathbb{C}$-wertige Fkt. auf $[a,b]$

$\partial_x \tilde{f}$, $\partial_y \tilde{f}$ die Richtungsableitungen von $\tilde{f}$ bzgl. $(1,0)$ und $(i,0)$

$\Rightarrow$ $\partial_x \tilde{f}(z,t) = \partial_x f(z, \gamma(t))\, \gamma'(t)$, $\partial_y \tilde{f}(z,t) = \partial_y f(z, \gamma(t))\, \gamma'(t)$

Maximumsprinzip $\Rightarrow$ Real- und Imaginärteil der Fkt. sind auf $C \times [a,b]$ durch eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beschränkt

$\Rightarrow$ $t \mapsto \partial_x \tilde{f}(z,t)$, $t \mapsto \partial_y \tilde{f}(z,t)$ haben eine int'bare Majorante

Betrachte nun die Fkt. $F: U \to \mathbb{C}$

$$F(z) = \int_a^b \tilde{f}(z,t)\, dt = \int_a^b f(z, \gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma f(z,w)\, dw$$

Vertauschbarkeit von Richtungsabl. und Integration $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) = \int_a^b \partial_x \tilde{f}(z_0, t)\, dt = \int_a^b \partial_x f(z_0, \gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_\gamma \partial_x f(z_0, w)\, dw$$

genauso: $\dfrac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \int_\gamma \partial_y f(z_0, w)\, dw$

Für jedes $w \in W$ ist $z \mapsto f(z,w)$ komplex diff'bar. $\Rightarrow$ $\partial_{\bar z} f_w = 0$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2} \partial_x f(z_0, w) + \frac{1}{2} i\, \partial_y f(z_0, w) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \bar z}(z_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x}(z_0) + \frac{1}{2} i \frac{\partial F}{\partial y}(z_0) = \frac{1}{2} \int_\gamma \partial_x f(z_0, w)\, dw + \frac{1}{2} i \int_\gamma \partial_y f(z_0, w)\, dw$$

$$= \int_\gamma \left(\tfrac{1}{2}\partial_x f(z_0,w) + \tfrac{1}{2} i \partial_y f(z_0,w)\right) dw = \int_\gamma 0 \, dw = 0$$

$\Rightarrow F$ ist in z_0 komplex diff'bar

außerdem: $F'(z_0) = \frac{\partial F}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(z_0) - \frac{1}{2} i \frac{\partial F}{\partial y}(z_0) =$

$$\int_\gamma \left(\tfrac{1}{2}\partial_x f(z_0,w) - \tfrac{1}{2} i \partial_y f(z_0,w)\right) dw = \int_\gamma \partial_z f(z_0,w)\, dw \qquad \square$$

Integration über $\dfrac{1}{w-z}$

Proposition (3.2)

Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ jeweils

$$\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} \quad = \quad 2\pi i.$$

Beweis von Prop. 3.2:

Betrachte die Fkt. $h : B_r(a) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z}$

Prop. 3.1 angew. auf $U = B_r(a)$, $W = \partial B_r(a)$, $f(z,w) = \frac{1}{w-z}$

zeigt, dass h auf U holomorph ist., mit komplexer Ableitung

$$h'(z) = \int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{(w-z)^2}$$

Die Fkt. $\mathbb{C} \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$, $w \mapsto (w-z)^{-2}$ hat eine komplexe Stammfkt.,

nämlich $w \mapsto -(w-z)^{-1}$ $\Rightarrow$ $h'(z) = 0$, für alle $z \in B_r(a)$ $\Rightarrow$

h ist auf $B_r(a)$ konstant. Betrachte den Integrationsweg $\gamma(t) = a + re^{2\pi i t}$

$(t \in [0,1])$. $\Rightarrow$ $\int_{\partial B_r(a)} \frac{dw}{w-z} = h(z) = h(a) = \int_\gamma \frac{dw}{w-a} = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}\, dt$

$$= \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{r e^{2\pi i t}}\, dt = \int_0^1 2\pi i \, dt = 2\pi i.$$

$\square$

Die Cauchysche Integralformel

Satz (3.4)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Sei $a \in U$ und $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\bar{B}_r(a) \subseteq U$. Dann gilt für jedes $z \in B_r(a)$ die Gleichung

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_r(a)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Die Werte von f im Inneren der Kreisscheibe sind also durch die Werte auf dem Rand festgelegt!