§ 2. Der Cauchysche Integralsatz

- Integrationsweg in $\mathbb{C}$ = stetige, stückweise stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

- Definition des komplexen Kurvenintegrals

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\,dt$$

(wobei $U \subseteq \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ Integrationsweg)

- Berechnung komplexer Kurvenintegrale

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad f_\gamma(b) - f_\gamma(a)$$

wobei $f_\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ Funktion mit $f_\gamma'(t) = (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)$ für alle bis auf endlich viele $t \in [a, b]$

Rechenregeln für komplexe Kurvenintegrale

Satz (2.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und seien $\gamma : [a, b] \to U$ und $\delta : [c, d] \to U$ zwei Integrationswege, wobei wir $\gamma(b) = \delta(c)$ voraussetzen.

(i) Für die Summe $\gamma + \delta$ und die Umkehrung $-\gamma$ gilt

$$\int_{\gamma+\delta} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\delta f(z)\,dz \text{ und } \int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$$

(ii) Ist $C \in \mathbb{R}_+$ eine Konstante mit $|f(z)| \le C$ für alle $z \in \gamma([a, b])$, so gilt für das komplexe Kurvenintegral die Abschätzung $\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le C\,\ell(\gamma)$ wobei $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ die Länge des Integrationsweges γ bezeichnet.

(iii) Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $F : U \to \mathbb{C}$ eine komplexe Stammfunktion von f, dann ist das komplexe Kurvenintegral gegeben durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz \quad = \quad (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a).$$

Beweis von Satz 2.1

zu (ii) Zeige zunächst: Ist $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt $\left| \int_a^b g(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |g(t)|\, dt$ (*)

Überprüfe durch eine einfache Rechnung:

$$\int_a^b (\lambda g)(t)\, dt = \lambda \int_a^b g(t)\, dt \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Setze $z = \int_a^b g(t)\, dt \in \mathbb{C}$ 1. Fall: $z = 0$

Dann ist (*) offensichtlich erfüllt.

2. Fall: $z \neq 0$ Setze $s = -\arg(z)$

2. Fall: $z \neq 0$ Setze $s = -\arg(z)$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathrm{Re}\left(e^{it} \int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{it} g(t)\right) dt$$

$$\leq \int_a^b |e^{it} g(t)|\,dt = \int_a^b |g(t)|\,dt$$

e^{is} ist korrekt, da $s = -\arg z$

Nach Def. des Arguments ist $e^{is} z$ reell und positiv, erhalte

$$\left|\int_a^b g(t)\,dt\right| = \left|e^{is} \int_a^b g(t)\,dt\right| = \underbrace{e^{is} \int_a^b g(t)\,dt}_{\in \mathbb{R}^+}$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{is} \int_a^b g(t)\,dt\right) \overset{\text{s.o.}}{\leq} \int_a^b |g(t)|\,dt \quad (\Rightarrow (*))$$

Seien nun $f: U \to \mathbb{C}$, γ und $C \in \mathbb{R}_+$ wie angeg.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b (f\circ\gamma)(t)\,\gamma'(t)\,dt\right| \overset{(*)}{\le}$$

$$\int_a^b |(f\circ\gamma)(t)|\,|\gamma'(t)|\,dt \le$$

$$c\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = c\,\ell(\gamma)$$

<u>zu (iii)</u> Sei $Z = \{t_1, \dots, t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ $(1 \le k \le m)$ jeweils stetig diff'bar ist. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung, angewendet auf

$t \mapsto (f \circ \gamma)(t)\,\gamma'(t)$ mit der

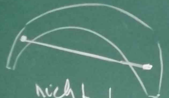
Stammfkt. $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$

$= (f \circ \gamma)(t)\,\gamma'(t)$, auf $[a,b] \setminus \{t_0, \dots, t_m\}$

$\Longrightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\,\gamma'(t)\,dt =$

$\int_a^b (F \circ \gamma)'(t)\,dt = (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a)$

$\square$



nicht konvex

gralieding. angewendet auf

Sternförmige Gebiete

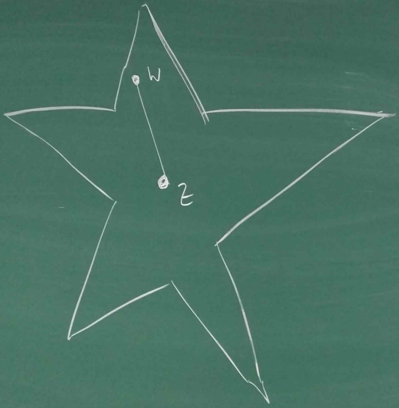
Erinnerung:

- Ein Gebiet in $\mathbb{C}$ ist eine offene, zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$.
- Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $p, q \in U$ auch die Spur der Verbindungsstrecke $[p, q]$ in U enthalten ist.

Definition (2.2)

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt sternförmig bezüglich eines Punktes $z \in U$, wenn für alle $w \in U$ die Spur der Verbindungsstrecke $[z, w]$ in U enthalten ist.

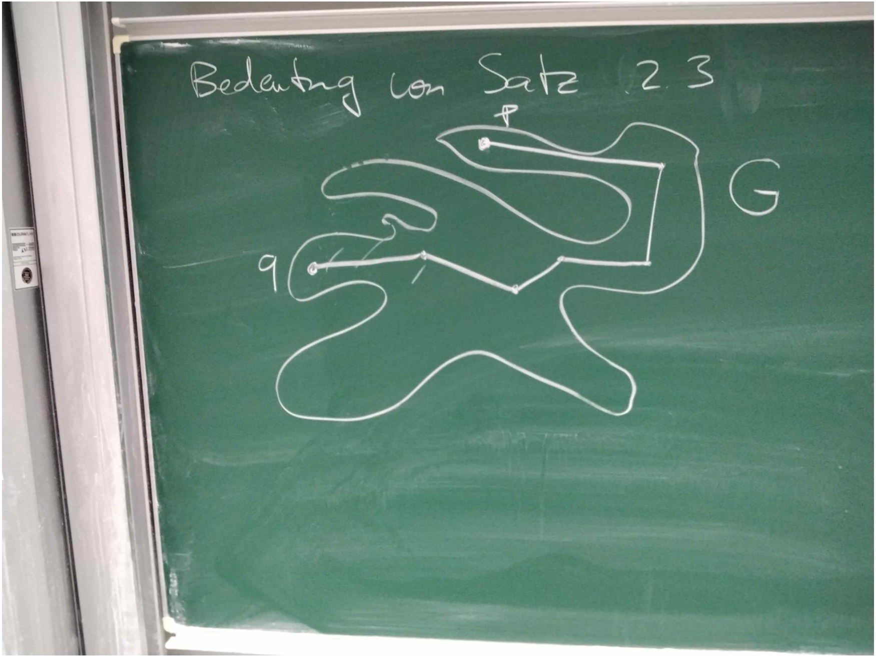
Bsp. für eine sternförmige Menge



Wegzusammenhang der Gebiete

Satz (2.3)

In einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ können je zwei Punkte p, q jeweils durch einen Polygonzug in G, also durch eine Summe von Verbindungsstrecken, miteinander verbunden werden.


Bedeutung von Satz 2.3
p
q
G

Komplexe Dreiecke

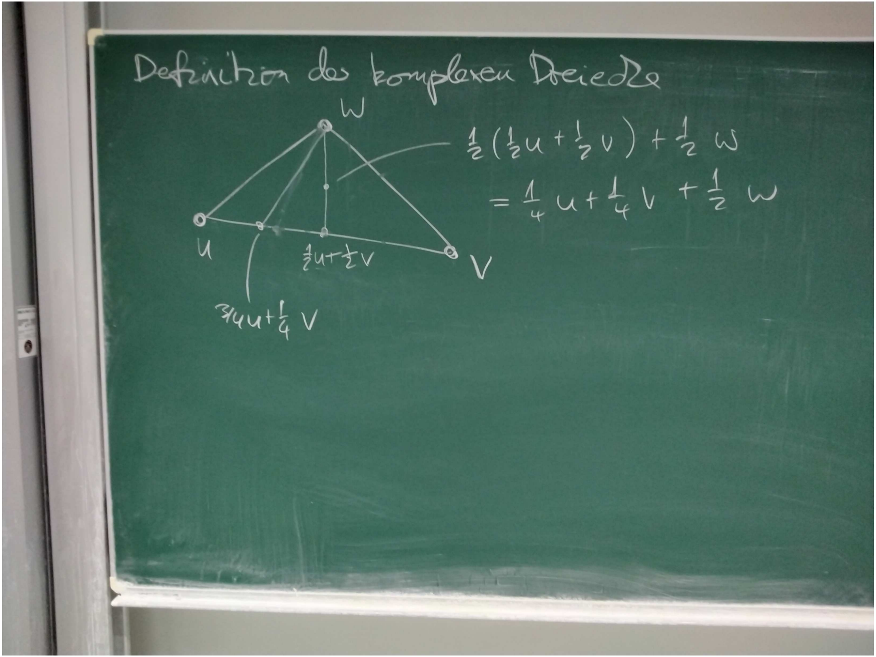
Definition (2.4)

Seien $u, v, w \in \mathbb{C}$ drei Punkte, die nicht auf einer gemeinsamen affinen Geraden liegen. Dann bezeichnen wir die Menge

$$\Delta = \Delta(u, v, w) = \{\lambda u + \mu v + \nu w \mid \lambda, \mu, \nu \in [0, 1], \lambda + \mu + \nu = 1\}$$

als Dreieck mit den Eckpunkten u, v, w. Als Randkurve des Dreiecks definieren wir die zusammengesetzte Kurve

$$\partial\Delta \quad = \quad [u, v] + [v, w] + [w, u].$$


Definition des komplexen Dreiecks
w
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v)+\frac{1}{2}w$
$=\frac{1}{4}u+\frac{1}{4}v+\frac{1}{2}w$
u
$\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}v$
v
$3/4u+\frac{1}{4}v$

Eigenschaften komplexer Dreiecke

- Für jede konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ mit $u, v, w \in U$ ist auch das Dreieck $\Delta = \Delta(u, v, w)$ in U enthalten.
- Ist $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, dann gilt auf Grund der Rechenregel für die Summe von Integrationswegen jeweils

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz = \int_u^v f(z)\ dz + \int_v^w f(z)\ dz + \int_w^u f(z)\ dz.$$

- Die Länge von $\partial\Delta$, also die Zahl $|v - u| + |w - v| + |u - w|$, bezeichnen wir als Umfang des Dreiecks.

Unterteilung von Dreiecken

Proposition (2.5)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, und seien $u, v, w \in U$ Punkte, die nicht auf einer affinen Geraden liegen. Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$, und seien $u' = \frac{1}{2}(v + w)$, $v' = \frac{1}{2}(u + w)$, $w' = \frac{1}{2}(u + v)$ die Seitenmittelpunkte von Δ. Dann können wir Δ in die vier kleineren Dreiecke

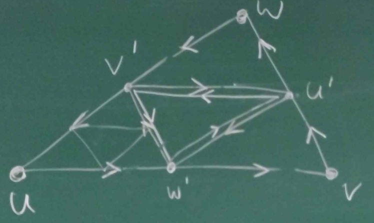
$$\Delta_1 = \Delta(u, w', v'), \Delta_2 = \Delta(v, u', w'), \Delta_3 = \Delta(w, v', u')$$

$$\text{und } \Delta_4 = \Delta(u', v', w')$$

zerlegen. Für jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\ dz \ = \ \int_{\partial\Delta_1} f(z)\ dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\ dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\ dz + \int_{\partial\Delta_4} f(z)\ dz.$$

Veranschaulichung von Prop. 2.5



Cauchyscher Integralsatz für Dreiecke *(nach E. Goursat)*

Satz (2.6)

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\Delta \subseteq U$ ein Dreieck, dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \quad = \quad 0.$$

Beweis von Satz 2.6

Unterteile Δ wie in Prop 2.5 in vier kleinere Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$. Sei $\Delta^{(1)}$ davon das Dreieck mit betragsgrößtem Integral $\int_{\partial \Delta^{(1)}} f(z)\,dz$.

$$\left| \int_{\partial \Delta} f(z)\,dz \right| \overset{2.5}{=} \left| \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial \Delta_k} f(z)\,dz \right| \leq$$

$$\sum_{k=1}^{4} \left| \int_{\partial \Delta_k} f(z)\,dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial \Delta^{(1)}} f(z)\,dz \right|$$

Wende dieselbe Vorgehensweise auf $\Delta^{(1)}$ statt Δ an. Iteration $\rightsquigarrow$ erhalte eine Folge

$\partial\Delta \qquad k=1 \quad \partial\Delta_k$

$\sum^{4} \left| \int f(z)\,dz \right| \le 4 \left| \int f(z)\,dz \right|$

$\Delta = \Delta^{(0)} \supseteq \Delta^{(1)} \supseteq \Delta^{(2)} \supseteq \dots$ von Dreiecken

$$\left| \int_{\partial\Delta^{(0)}} f(z)\,dz \right| \le 4^n \left| \int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz \right| \quad (*_2)$$

Für den Umfang l_n und den Durchmesser δ_n von $\Delta^{(n)}$ gilt $l_n = 2^{-n} l_0$, $\delta_n = 2^{-n} \delta_0$

Kompaktheit, Schachtelungsprinzip $\rightsquigarrow \exists\, w \in \mathbb{C}$ mit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \Delta^{(n)} = \{w\}$.

komplexe Diff'barkeit von f in w $\rightsquigarrow$ $\exists$ Fkt. $h: U \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = f(w) + (z-w) f'(w) + h(z)$ und $\lim_{z \to w} \frac{h(z)}{|z-w|} = 0 \quad (*_1)$

Die Fkt. $g(z) = f(w) + (z-w)\, f'(w)$ hat die komplexe Stammfkt. $G(z) = f(w)\, z + \frac{1}{2}(z-w)^2 f'(w)$ Rechenregeln für komplexe Integrale $\rightarrow$

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta^{(n)}} (g+h)(z)\,dz =$$

geschl. Int.-weg

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} g(z)\,dz + \int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz =$$

g hat kompl. Stammfkt. G

$$\int_{\partial\Delta^{(n)}} h(z)\,dz$$

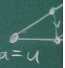
Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg.

Beweisid

Fallunter

1 Fall. a

falls



2 Fall: a

Dre

$(*_1) \Rightarrow$ Für alle z in einer hinr. kleinen Umg. V von w gilt $|h(z)| \leq \varepsilon |z-w|$

Für alle $z \in \Delta^{(n)}$ gilt $|z-w| \leq \delta_n$

und $|h(z)| \leq \varepsilon \delta_n$. Satz (2.1) (ii)

$$\Rightarrow \left| \int_{\partial \Delta^{(n)}} f(z)\, dz \right| = \left| \int_{\partial \Delta^{(n)}} h(z)\, dz \right|$$

$$\leq \varepsilon \cdot \delta_n \cdot l_n = 4^{-n} \delta_0 l_0 \varepsilon$$

$$\underset{(*_2)}{\Rightarrow} \left| \int_{\partial \Delta^{(0)}} f(z)\, dz \right| \leq \delta_0 l_0 \varepsilon$$

Da ε bel. klein gew. werden kann, ist das Integral gleich 0. $\square$

Veran

Fehlende Holomorphie in einem Punkt

Proposition (2.7)

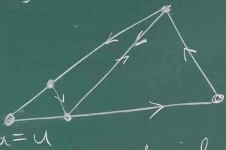
Sei $\Delta = \Delta(u, v, w)$ ein Dreieck, $a \in \Delta$ ein Punkt, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen mit $U \supseteq \Delta$ und $f : U \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $U \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$.

Beweisidee für Prop. 2.7.

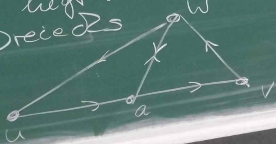
Fallunterscheidung

1. Fall: a ist Eckpunkt z.B. $a = u$

falls $\Delta = \Delta(u, v, w)$



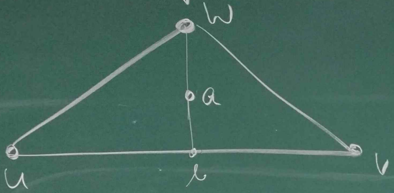
2. Fall: a liegt auf einer Seite des Dreiecks



Stamm-

eg.

3 **Fall**: a liegt im Inneren des Dreiecks

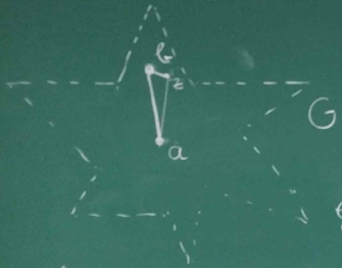


Komplexe Stammfunktion durch Wegintegrale

Proposition (2.8)

Sei G ein bezüglich des Punktes $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann ist durch $F : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \int_a^z f(w)\,dw$ eine komplexe Stammfunktion von f definiert.

Beweisidee von Prop. 2.8



$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

$$F(b) = \int_a^b f(z)\,dz$$

Goursat $\longrightarrow$

$$F(z) - F(b) = \int_b^z f(w)\,dw$$

rechne nach: $\lim\limits_{z \to b} \dfrac{F(z) - F(b)}{z - b} = \lim\limits_{z \to b} \int_b^z f(w)\,dw = f(b)$

Cauchyscher Integralsatz für sternförmige Gebiete

Satz (2.9)

Sei G ein bezüglich $a \in G$ sternförmiges Gebiet, und sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige und auf $G \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion. Dann gilt für jede in G verlaufende, geschlossene Kurve γ jeweils

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$