Richtungsableitungen $\mathbb{C}$-wertiger Funktionen

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $w = u + iv \in U$ ein vorgegebener Punkt, dann bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad \partial_1 f(w) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad \partial_i f(w)$$

die Richtungsableitungen von f im Punkt w bezüglich der Richtungen 1 und i. Nach Definition gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(w+t) - f(w)}{t} \quad = \quad \lim_{x \to u} \frac{f(x+iv) - f(u+iv)}{x-u}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(w) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{f(w+it) - f(w)}{t} \quad = \quad \lim_{y \to v} \frac{f(u+iy) - f(u+iv)}{y-v}$$

wobei die Grenzwerte jetzt bezüglich einer reellen Variablen (t bzw. x oder y) gebildet werden.

Darstellung durch Real- und Imaginärteil

Schreiben wir f in der Form $f = g + ih$ mit reellwertigen Funktionen $g, h : U \to \mathbb{R}$, dann gilt offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i\frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Darstellung durch partielle Ableitungen

Die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $x + iy \mapsto (x, y)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen. Setzen wir nun

$$f_{\mathbb{R}} = \iota \circ f \circ \iota^{-1} \quad ,$$

dann gilt

$$f_{\mathbb{R}}(x, y) = (g(x + iy), h(x + iy)).$$

Ist $w = u + iv \in \mathbb{C}$, dann sind die partiellen Ableitungen der Komponenten von $(f_{\mathbb{R}})_1$ gegeben durch

$$\partial_1 (f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \frac{\partial g}{\partial x}(w)$$

und

$$\partial_2 (f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Die Jacobi-Matrix von $f_{\mathbb{R}}$

Ebenso gilt

$$\partial_1 (f_{\mathbb{R}})_2(u,v) = \frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \partial_2 (f_{\mathbb{R}})_2(u,v) = \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Ist $f_{\mathbb{R}}$ an der Stelle (u,v) sogar total differenzierbar, dann gilt

$$f'_{\mathbb{R}}(u,v) \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(w) & \frac{\partial g}{\partial y}(w) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(w) & \frac{\partial h}{\partial y}(w) \end{pmatrix}.$$

Definition der reellen Differenziebarkeit

Definition (1.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ wird reell differenzierbar im Punkt $w \in U$ genannt, wenn sie als Funktion auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ in w total differenzierbar ist.

Hinreichend dafür ist die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w)$$

oder (gleichbedeutend) die Existenz und Stetigkeit von

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w), \ \frac{\partial g}{\partial y}(w), \ \frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Komplexe Differenzierbarkeit impliziert reelle Diff'barkeit

Proposition (1.8)

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ im Punkt $w \in U$ komplex differenzierbar, dann ist sie im selben Punkt auch reell differenzierbar. Die totale Ableitung von f in w ist durch die lineare Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(w)z$ gegeben.

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Satz (1.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $w \in U$ ein Punkt, in dem f reell differenzierbar ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Die Funktion f ist in w komplex differenzierbar.

(ii) Es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dass ist die komplexe Ableitung von f im Punkt w gegeben durch

$$f'(w) \quad = \quad \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w).$$

Beweis von Satz 1.9

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor.: f ist in w komplex diff'bar

Satz 1.8 $\rightarrow$ Die totale Abl. von f in w ist geg. durch $z \mapsto f'(w)z$. Sei $f'(w) = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zshg zwischen totaler Abl und Richtungsabl $\Rightarrow$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) = f'(w) \cdot 1 =$$

$$(a + bi) \cdot 1 = a + bi \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(w) = a, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = b$$

$\frac{\partial g}{\partial y}(w) + i\frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial f}{\partial y}(w) = f'(w)\cdot i = (a+ib)\cdot i$

$= (-b) + ia \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(w) = -b = -\frac{\partial h}{\partial x}(w)$.

$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = a = \frac{\partial g}{\partial x}(w)$

„(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor.: CR-DGL sind erfüllt, f ist in w reell (d.h. total) diff'bar

totale Diff'barkeit $\Rightarrow \exists$ $\mathbb{R}$-lin. Abb. $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Abb. $\psi: U \to \mathbb{C}$ mit $f(w+z) = f(w) + \phi(z) + \psi(z)$ für alle z in einer Umg. von 0, wobei $\lim_{z\to 0} \frac{\psi(z)}{|z|} = 0$

$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{\psi(z)}{z} = 0$

Sei $a = \frac{\partial g}{\partial x}(w) = \frac{\partial h}{\partial y}(w)$ und

$b = \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w)$

Zshg. zwischen totaler Abl. und Richtungs-Ableitung $\Rightarrow \phi(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(w) =$

$\frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\frac{\partial h}{\partial x}(w) = a + ib$ und

$\phi(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial y}(w) + i\frac{\partial h}{\partial y}(w)$

$= -b + ia = i(a+ib)$

Da ϕ linear auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$ ist, folgt für alle $z = x+iy \in \mathbb{C}$ jeweils

$$\phi(z) = \phi(x+iy) = \phi(x) + \phi(iy) =$$

$$x\,\phi(1) + y\,\phi(i) = x(a+ib) + yi(a+ib)$$

$$= (x+iy)(a+ib) = (a+ib)z$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ in einer Umg von 0 gilt

$$\frac{\psi(z)}{z} = \frac{f(w+z) - f(z) - \phi(z)}{z}$$

$$= \frac{f(w+z) - f(z)}{z} - (a+ib)$$

$$\lim_{z\to 0} \frac{\psi(z)}{z} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{z}$$

$= a+ib \Rightarrow f$ ist komplex diff'bar in w,

$$f'(w) = a+ib = \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i\,\frac{\partial h}{\partial x}(w) \qquad \square$$

B

a

$\forall$

z, z

die

form

$\lim_{a\to 0}$

längere

Definition der Wirtinger-Ableitungen

Die Wirtinger-Ableitungen von f im Punkt z sind definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial z} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad = \quad \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Genau dann ist f in w komplex differenzierbar, wenn

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(w) \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

Die komplexe Ableitung ist in diesem Fall gegeben durch

$$f'(w) \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial z}(w).$$

Die komplexe Umkehrregel

Satz (1.10)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine injektive, komplex differenzierbare Funktion mit stetiger, nichtverschwindender Ableitung, d.h. es gelte $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$. Dann ist auch $U = f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$, die Umkehrfunktion $g : U \to \mathbb{C}$ von f ist auf ganz U komplex differenzierbar, und für alle $w \in U$ gilt

$$g'(w) = f'(g(w))^{-1}.$$

Bedeutung des Konvergenzradius

Satz (1.11)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $a \in \mathbb{C}$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ die zugehörige komplexe Potenzreihe im Entwicklungspunkt a. Sei ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe.

(i) Im Fall $\rho = 0$ konvergiert f nur im Punkt a.

(ii) Im Fall $\rho = +\infty$ konvergiert f in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ absolut.

(iii) Sei nun $0 < \rho < +\infty$. Dann ist f in allen Punkte $z \in B_\rho(a)$ absolut konvergent und in allen Punkten $z \notin \bar{B}_\rho(a)$ divergent.

Gilt (iii), dann definiert f auf $B_\rho(a)$ eine stetige $\mathbb{C}$-wertige Funktion. Im Fall (ii) ist diese Funktion sogar auf ganz $\mathbb{C}$ definiert.

Die formale Ableitung einer Potenzreihe

Die sogenannte formale Ableitung einer Potenzreihe $f(z)$ wie oben ist gegeben durch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n.$$

Wie in der reellen Analysis zeigt man auch hier, dass f und f' denselben Konvergenzradius besitzen.

Holomorphie von Potenzreihenfunktionen

Satz (1.12)

Sei $r \in \mathbb{R}^+$ und $f : B_r(a) \to \mathbb{C}$ eine Funktion, deren Werte durch eine Potenzreihe im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ mit Konvergenzradius $\rho \geq r$ gegeben sind. Dann ist f auf $B_r(a)$ eine holomorphe Funktion, und die Ableitung von f ist in jedem Punkt $z \in B_r(a)$ der Wert der formalen Ableitung.

Beweis von Satz 1.12:

Beschränke den Beweis auf den Entw. punkt $a = 0$, d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei ρ der Konvergenzradius.

z.zg.: f auf $B_\rho(0)$ komplex diff'bar, die komplexe Ableitung ist geg. durch die formale Ableitung. Zu zeigen ist also

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right) = 0$$

längere Rechnung (s. Skript) $\rightsquigarrow$

$$\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right| \leq$$

$$|h| \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)|a_n| \, (|h|+|z|)^{n-2}$$

für $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $|h|$ hinr. klein

wähle $r, \delta, s \in \mathbb{R}^+$ so, dass $|z| + \delta < s < r < \rho$

$\Rightarrow$ erhalte für $0 < |h| < \delta$ jeweils

$$(*) \quad \underbrace{\left| \frac{f(z+h)-f(z)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \right|}_{} \leq |h| \left(\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| s^{n-2} \right)$$

zweite ~~formale~~ Ableitung

$$f'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

Konvergenzradien von f, f', f'' sind gleich

$\Rightarrow f''$ konvergiert in s absolut $\Rightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| s^{n-2}$ konvergiert

Also läuft der Ausdruck $(*)$ für $|h| \to 0$ gegen 0. $\square$

Definition der Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion im Komplexen

Definition (1.13)

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\exp(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Definition (1.14)

Die komplexe Kosinus- und Sinusfunktion sind auf ganz $\mathbb{C}$ definiert durch

$$\cos(z) = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \qquad \text{und} \qquad \sin(z) = \tfrac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Additionstheoreme für Sinus und Kosinus in $\mathbb{C}$

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) \quad (1)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \quad (2)$$

Folgerungen daraus:

(3) $\cos(z) = \sin(z + \frac{1}{2}\pi)$

(4) $\sin(z)^2 + \cos(z)^2 = 1$

(jeweils für alle $z, w \in \mathbb{C}$)

Beweis von (1). Benötige für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Gl. $e^{z+w} = e^z e^w$ ($e^z = \exp(z)$)

Beweis von (1). Benötige für alle $z, w \in \mathbb{C}$

(Beweis mit Hilfe von Cauchyprod. wie in der Analysis I)

$$\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) =$$

$$\frac{1}{4i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\left(e^{iw} + e^{-iw}\right) + \frac{1}{4i}\left(e^{iw} - e^{-iw}\right)\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\Big(e^{i(z+w)} - \cancel{e^{i(w-z)}} + \cancel{e^{i(z-w)}} - e^{-i(z+w)}$$

$$+ e^{i(w+z)} - \cancel{e^{i(z-w)}} + \cancel{e^{i(w-z)}} - e^{-i(w+z)} \Big)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}\right) = \sin(z+w) \qquad \square$$

Definition des komplexen Logarithmus

Proposition (1.15)

Die komplexe Exponentialfunktion wird injektiv, wenn man sie auf $D = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\}$ einschränkt, und sie bildet die Menge D bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab. Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to D$ wird der komplexe Logarithmus genannt.

Die Ableitung des komplexen Logarithmus ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ gegeben durch

$$\ln'(z) \quad = \quad \frac{1}{z}.$$

Berechnung der Ableitung des komplexen Logarithmus:

$$\ln'(z) = \frac{1}{\exp'(\ln(z))} = \frac{1}{\exp(\ln(z))} = \frac{1}{z}$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

[komplexe Umkehrregel, angew. auf $\exp: D^\circ \to \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ mit der Umkehrfkt. $\ln: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to D^\circ$

[redacted]

Definition der komplexen n-ten Wurzeln

Definition (1.16)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist die komplexe n-te Wurzelfunktion definiert durch

$$z^{1/n} \quad = \quad \begin{cases} e^{\frac{1}{n}\ln(z)} & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases}.$$

Im Fall $n = 2$ schreibt man an Stelle von $z^{1/2}$ auch $\sqrt{z}$.

Besonderheit der komplexen Quadratwurzel

- Bei der komplexen Quadratwurzel ist die vertraute Gleichung

  $$\sqrt{zw} \quad = \quad \sqrt{z} \cdot \sqrt{w}$$

  nicht für alle $z, w \in \mathbb{C}$ erfüllt. Gegenbeispiel: Setze $z = w = -1$. Nach Definition ist $\ln(-1) = \pi i$ und somit $\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$. Andererseits ist $\ln(1) = 0$ und somit $\sqrt{1} = e^{\frac{1}{2} \cdot 0} = 1$. Somit ist $\sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$, aber $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1$.
- Die beiden Seiten stimmen aber immer bis auf Vorzeichen überein.

Besonderheit der komplexen Logarithmusfunktion

- Die Gleichung $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$, die auf den positiven reellen Zahlen gültig ist, gilt für beliebige $z, w \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen nicht mehr. Ist beispielsweise $z = w = -1$, dann gilt $\ln(z) + \ln(w) = \pi i + \pi i = 2\pi i$, aber $\ln(zw) = \ln(1) = 0$.
- Im Allgemeinen können sich $\ln(zw)$ und $\ln(z) + \ln(w)$ um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden.

Besonderheit der komplexen Logarithmusfunktion (Forts.)

- Die komplexe Logarithmusfunktion ist nicht auf ganz $\mathbb{C}^\times$ stetig. Das ist der Grund, weshalb bei der Angabe der Ableitung die negative reelle Halbgerade $\mathbb{R}_-$ ausgeschlossen wird.

- Überquert man die negative reelle Halbgerade von oben nach unten, dann springt der Imaginärteil von $\ln(z)$ von $-\pi i$ auf $+\pi i$. Das lässt sich am besten nachvollziehen, wenn man Wert der Logarithmusfunktion entlang einer Kreisbahn $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $t \mapsto re^{it}$ mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$ verfolgt. Diese überquert die negative reelle Halbgerade bei $\gamma(\pi) = -r$.

Besonderheit der komplexen Logarithmusfunktion (Forts.)

- Allgemein gilt: Ist $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi \leq \pi$, dann ist der Wert der Logarithmusfunktion $\ln(z) = \ln(r) + i\varphi$.
  Für $0 \leq t \leq \pi$ gilt deshalb $\ln(\gamma(t)) = \ln(r) + it$.

- Für $\pi < t \leq 2\pi$ gilt jeweils $\gamma(t) = re^{it} = re^{i(t-2\pi)}$, und es ist $-\pi < t - 2\pi \leq 0$. Deshalb gilt in diesem Bereich $\ln(\gamma(t)) = \ln(r) + i(t - 2\pi)$.

- Insbesondere gilt also

$$\ln(\gamma(\pi - \varepsilon)) \;=\; \ln(r) + i\pi - i\varepsilon \;\approx\; \ln(r) + i\pi$$

  und

$$\ln(\gamma(\pi + \varepsilon)) \;=\; \ln(r) - i\pi + i\varepsilon \;\approx\; \ln(r) - i\pi$$

  für „sehr kleines" $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Der Imaginärteil von $\ln(\gamma(t))$ springt an der Stelle $t = \pi$ also tatsächlich von π auf $-\pi$.

Proposition (1.17)

(i) Die komplexe Sinusfunktion wird injektiv, wenn man sie auf die Teilmenge $D' = \{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2}\pi < \mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2}\pi\}$ einschränkt, und sie bildet diese Menge bijektiv auf das Gebiet $G = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ ab. Die Umkehrfunktion $\arcsin : G \to D'$ wird der komplexe Arcus sinus genannt.

(ii) Die komplexe Kosinusfunktion wird injektiv, wenn man sie auf die Teilmenge $D'' = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ einschränkt, und sie bildet diese Menge bijektiv auf das Gebiet G aus Teil (i) ab. Die Umkehrfunktion $\arccos : G \to D''$ wird der komplexe Arcus cosinus genannt.

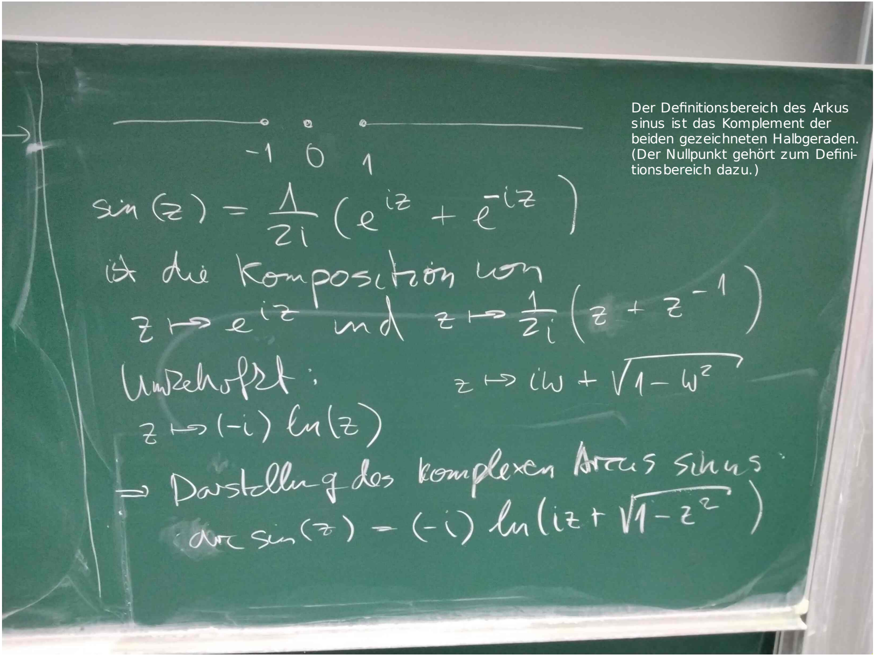
Alternative Darstellung und Ableitung des Arcus sinus

- Für alle $z \in G$ gilt

$$\arcsin(z) \quad = \quad (-i)\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

- Die Ableitung von Arcus sinus und Arcus cosinus sind für alle $z \in G$ gegeben durch

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \quad \text{und} \quad \arccos'(z) = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}.$$



Der Definitionsbereich des Arkus sinus ist das Komplement der beiden gezeichneten Halbgeraden. (Der Nullpunkt gehört zum Definitionsbereich dazu.)