

Teil II. Funktionentheorie

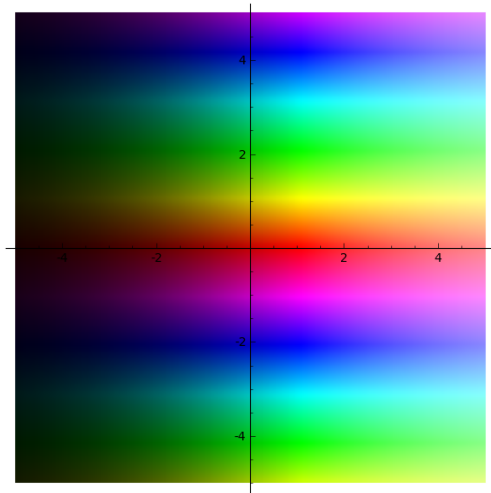
Gegenstand:

Untersuchung **komplex differenzierbarer** Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ auf offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$

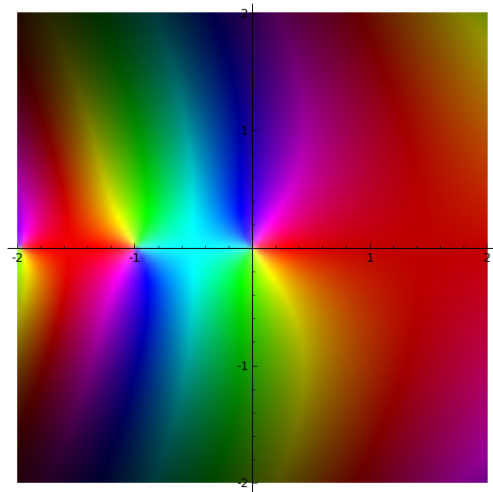
Warum Funktionentheorie?

- Komplex differenzierbare Funktionen besitzen gegenüber „nur“ reell differenzierbaren viele bemerkenswerte Eigenschaften (Analytizität, Permanenzprinzip, lokale Konformität, Gebietstreue) und insgesamt eine **reichhaltigere Theorie** (Beispiel Singularitäten).
- bieten neuen Zugang zu Problemen der **reellen Analysis** (Beispiel: Residuensatz $\Rightarrow$ Integralrechnung)
- wichtiger **historischer Zugang** zur Analysis und zum Funktionsbegriff
- viele Querverbindungen zu **anderen Gebieten** der Mathematik (Topologie, Funktionalanalysis, Zahlentheorie)

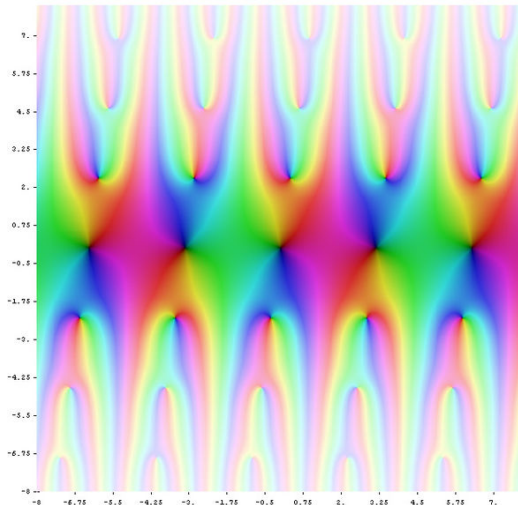
Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Exponentialfunktion



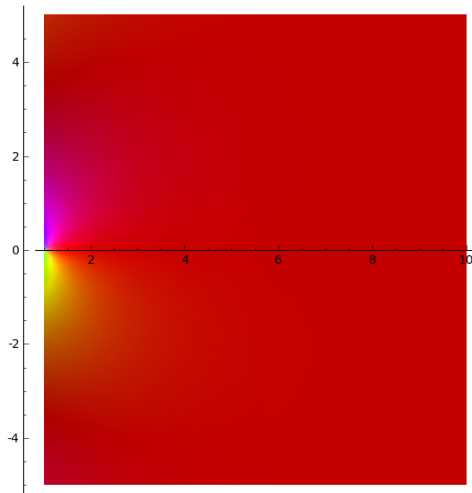
Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Gammafunktion



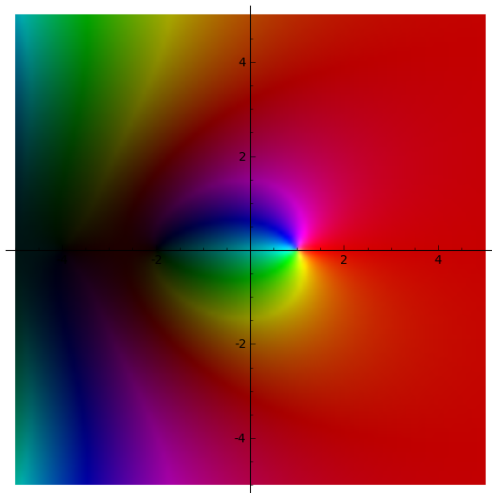
Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Thetafunktion



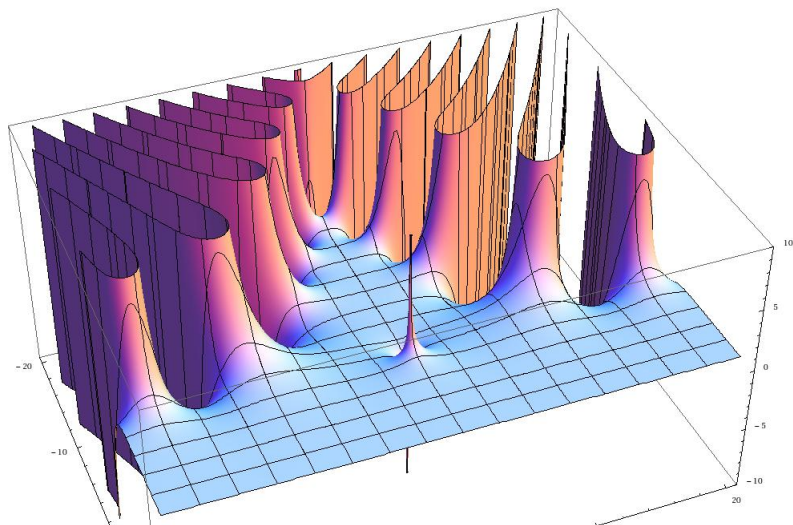
Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Zetafunktion ohne analytische Fortsetzung



Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Zetafunktion mit analytischer Fortsetzung



Graphische Darstellungen komplexer Funktionen: Zetafunktion, dreidimensionale Darstellung des Betrags



§1. Komplexe Differenzierbarkeit

Wiederholung: Eigenschaften komplexer Zahlen

- Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen bildet einen Erweiterungskörper von $\mathbb{R}$.
- Es gibt ein ausgezeichnetes Element $i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $i^2 = -1$, die sogenannte **imaginäre Einheit**.
- Jedes Element $z \in \mathbb{C}$ kann auf eindeutige Weise in der Form $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Man nennt a den **Real-** $\operatorname{Re}(z)$ und b den **Imaginärteil** $\operatorname{Im}(z)$ von z .
- Auf $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $\iota(a + ib) = a - ib$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, die sogenannte **komplexe Konjugation**. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $\bar{z} = \iota(z)$ die zu z **konjugierte** komplexe Zahl.

Wiederholung komplexe Zahlen (Forts.)

- Es gilt $\iota(z + w) = \iota(z) + \iota(w)$, $\iota(zw) = \iota(z)\iota(w)$ und $\iota(\iota(z)) = z$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ sowie $\iota(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
An Stelle von $\iota(z)$ ist auch die Schreibweise $\bar{z}$ für die konjugierte komplexe Zahl gebräuchlich.
- Für jedes $z \in \mathbb{C}$ nennt man $|z| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}_+$ den **komplexen Absolutbetrag** (kurz Betrag) von z . Ist $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann gilt $|z|^2 = a^2 + b^2$. Weiter gilt $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$, $|zw| = |z||w|$ und $|z + w| \leq |z| + |w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Argument und Polarkoordinaten

Satz (1.1)

Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, das sogenannte **Argument** $\arg(z)$ von z , mit der Eigenschaft

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Das Paar $(|z|, \varphi)$ bezeichnet man als die **Polarkoordinaten** von z .

Die Festlegung des Arguments φ auf das halboffene Intervall $[0, 2\pi[$ ist willkürlich gewählt. Häufig wird statt dessen auch $\varphi \in]-\pi, \pi]$ gefordert.

Konvergente Folge und Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$

- Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ **konvergiert** gegen eine Zahl $z \in \mathbb{C}$, d.h. es gilt

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n ,$$

wenn für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|z_n - z| < \varepsilon$ für alle z_n mit $n \geq N$ erfüllt ist.

- Von einer **Cauchyfolge** in $\mathbb{C}$ spricht man, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|z_m - z_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt.

Konvergenz in $\mathbb{C}$

Proposition (1.2)

Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ ein weiteres Element. Es sei $z_n = a_n + ib_n$ und $z = a + ib$ die Zerlegung der Zahlen in Real- und Imaginärteil, mit $a_n, b_n, a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (i) Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen z .
- (iu) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Ebenso ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, wenn $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beides Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ sind.

Prop 1.2

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad z \neq \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ allgemein gilt:

Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N :$

$|z_n - z| < \varepsilon$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

$$\text{somit } |a_n - a| \leq |(a_n - a) + i(b_n - b)| =$$

$$|(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |z_n - z| < \varepsilon,$$

$$|b_n - b| < \varepsilon \text{ analog}$$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Vor: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

$|b_n - b| < \varepsilon$ analog

"(i) $\Rightarrow$ (i)' Vor: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

z.zg: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Vor $\rightarrow$

$\exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N: |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |z_n - z| &= |(a_n - a) + i(b_n - b)| \leq |a_n - a| + |i(b_n - b)| \\ &= |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \quad \square \end{aligned}$$



Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Satz (1.3)

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist **vollständig**, d.h. die Cauchyfolgen in $\mathbb{C}$ sind genau die konvergenten Folgen.

Stetigkeit und Grenzwerte in $\mathbb{C}$

Sei $U \subset \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (i) Die Funktion f ist **stetig** im Punkt $z \in U$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U , die gegen z konvergiert, jeweils

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(z) \quad \text{erfüllt ist.}$$

- (ii) Sei nun $w \in \mathbb{C} \setminus U$ und $b \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen b als **Grenzwert** der Funktion f für $z \rightarrow w$ und schreiben

$$\lim_{z \rightarrow w} f(z) = b \quad ,$$

wenn eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = w$ existiert und für **jede** solche Folge jeweils $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = b$ gilt.

Die Topologie auf $\mathbb{C}$

- (i) Für jedes $w \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}^+$ bezeichnen wir die Menge $B_r(w) = \{z \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$ als **offenen Ball** vom Radius r um den Punkt w .
- (ii) Wird in der Ungleichung $|w - z| < r$ das “ $<$ ” durch “ $\leq$ ” ersetzt, dann sprechen wir von einem **abgeschlossenen Ball**, der mit $\bar{B}_r(w)$ bezeichnet wird.
- (iii) Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ als **offen**, wenn für jedes $z \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $B_\varepsilon(z) \subseteq U$ existiert.

Komplexe Differenzierbarkeit

Definition (1.4)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $w \in U$. Wir bezeichnen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ als **komplex differenzierbar** im Punkt w , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}$$

existiert. Wir bezeichnen diese gegebenenfalls als die **komplexe Ableitung** $f'(w)$ von f im Punkt w . Ist f in jedem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann bezeichnen wir f als **holomorphe Funktion** auf der Menge U .

Konstante Funktionen und Identität

- (i) Die Ableitung der Abbildung $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z$ ist konstant gleich 1. Es gilt also $\text{id}'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- (ii) Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ konstant, gibt es also ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = \lambda$ für alle $z \in \mathbb{C}$, dann folgt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow w} \frac{\text{id}(z) - \text{id}(w)}{z - w} &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{z - w}{z - w} \\ &= \lim_{z \rightarrow w} 1 = 1 \rightarrow \text{id}'(w) = 1\end{aligned}$$

Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ geg durch $f(z) = \lambda$

$$\forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} =$$

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{\lambda - \lambda}{z - w} = \lim_{z \rightarrow w} 0 = 0$$

$$\rightarrow \lim_{z \rightarrow w} f'(z) = 0$$

Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Proposition (1.5)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, und seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen. Sind f und g in einem Punkt $z \in U$ komplex differenzierbar, dann auch die Funktionen $f + g$ und fg . Es gilt

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z) \quad \text{und} \quad (fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Gilt darüber hinaus $g(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ im Punkt z komplex differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Die komplexe Kettenregel

Proposition (1.6)

Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offene Teilmengen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen, wobei wir $f(U) \subseteq V$ voraussetzen. Ist f in einem Punkt $z \in U$ und g im Punkt $w = f(z)$ komplex differenzierbar, dann ist auch $g \circ f$ in z komplex differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Richtungsableitungen $\mathbb{C}$ -wertiger Funktionen

Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $w = u + iv \in U$ ein vorgegebener Punkt, dann bezeichnen wir mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) = \partial_1 f(w) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w) = \partial_i f(w)$$

die **Richtungsableitungen** von f im Punkt w bezüglich der Richtungen 1 und i . Nach Definition gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(w + t) - f(w)}{t} = \lim_{x \rightarrow u} \frac{f(x + iv) - f(u + iv)}{x - u}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(w) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(w + it) - f(w)}{t} = \lim_{y \rightarrow v} \frac{f(u + iy) - f(u + iv)}{y - v}$$

wobei die Grenzwerte jetzt bezüglich einer **reellen** Variablen (t bzw. x oder y) gebildet werden.

Darstellung durch Real- und Imaginärteil

Schreiben wir f in der Form $f = g + ih$ mit reellwertigen Funktionen $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$, dann gilt offenbar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Bsp. für die Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$(1) f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = x + iy \mapsto z^2 = (x + iy)^2 \\ = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i 2xy$$

$$\Rightarrow f = g + ih \text{ mit } g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \text{ geg. durch} \\ g(x + iy) = x^2 - y^2, \quad h(x + iy) = 2xy$$

$$(2) \text{ komplexe Konjugation } L: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z = x + iy \\ \mapsto \bar{z} = x - iy = x + i(-y)$$

$$\rightarrow L = g + ih \text{ mit } g(x + iy) = x, \quad h(x + iy) = -y$$

Bildung der Richtungsableitungen.

$$(1) \frac{\partial g}{\partial x}(z) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(z) = -2y, \quad \frac{\partial h}{\partial x}(z) = 2y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) + i \frac{\partial h}{\partial x}(z) = 2x + i2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{\partial g}{\partial y}(z) + i \frac{\partial h}{\partial y}(z) = -2y + i2x$$

$$f_R(x,y) = (g(x+iy), h(x+iy)) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

$$\partial_1(f_R)_1(x,y) = 2x, \quad \partial_1(f_R)_2 = 2y$$

$$\partial_2(f_R)_1(x,y) = -2y, \quad \partial_2(f_R)_2 = 2x$$

Darstellung durch partielle Ableitungen

Die Abbildung $\iota : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x + iy \mapsto (x, y)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Setzen wir nun

$$f_{\mathbb{R}} = \iota \circ f \circ \iota^{-1},$$

dann gilt

$$f_{\mathbb{R}}(x, y) = (g(x + iy), h(x + iy)).$$

Ist $w = u + iv \in \mathbb{C}$, dann sind die partiellen Ableitungen der Komponenten von $(f_{\mathbb{R}})_1$ gegeben durch

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \frac{\partial g}{\partial x}(w)$$

und

$$\partial_2(f_{\mathbb{R}})_1(u, v) = \frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Die Jacobi-Matrix von $f_{\mathbb{R}}$

Ebenso gilt

$$\partial_1(f_{\mathbb{R}})_2(u, v) = \frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \partial_2(f_{\mathbb{R}})_2(u, v) = \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Ist $f_{\mathbb{R}}$ an der Stelle (u, v) sogar **total differenzierbar**, dann gilt

$$f'_{\mathbb{R}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(w) & \frac{\partial g}{\partial y}(w) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(w) & \frac{\partial h}{\partial y}(w) \end{pmatrix}.$$

Definition der reellen Differenzierbarkeit

Definition (1.7)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ wird **reell differenzierbar** im Punkt $w \in U$ genannt, wenn sie als Funktion auf dem $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{C}$ in w total differenzierbar ist.

Hinreichend dafür ist die Existenz und Stetigkeit der Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(w)$$

oder (gleichbedeutend) die Existenz und Stetigkeit von

$$\frac{\partial g}{\partial x}(w), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(w), \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(w).$$

Komplexe Differenzierbarkeit impliziert reelle Diff'barkeit

Proposition (1.8)

Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ im Punkt $w \in U$ komplex differenzierbar, dann ist sie im selben Punkt auch reell differenzierbar. Die totale Ableitung von f in w ist durch die lineare Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f'(w)z$ gegeben.

Beweis von Prop. (18).

geg: $f: U \rightarrow \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $w \in U$

Vor: f ist in w komplex diff'bar

z.zg: f ist in w reell diff'bar, also
total diff'bar, wenn $\mathbb{C}$ als normier-
ter $\mathbb{R}$ -Vektorraum betrachtet wird.

$$\begin{aligned}\text{Vor} \Rightarrow f'(w) &= \lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(w+z) - f(w)}{z}\end{aligned}$$

$$\text{Setze } \varphi(z) \stackrel{(*)}{=} \frac{f(w+z) - f(w)}{z} - f'(w)$$

Ja
(x,

Dies
lim

der

$z = x +$

$2z$

Dann gilt also $\lim_{z \rightarrow 0} \varphi(z) = 0$

$$\text{Definiere } \psi(z) = z \varphi(z) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\psi(z)}{z} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\psi(z)}{|z|} = 0$$

Außerdem ist (*) äquivalent zu

$$f(z+w) = f(z) + \underbrace{f'(w)z}_{\text{linear}} + \psi(z)$$

$\rightarrow f$ ist in z total diff'bar, mit Ableitung

$\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f'(w)z$ und Fehlerterm $\psi(z)$

□

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Satz (1.9)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $w \in U$ ein Punkt, in dem f reell differenzierbar ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Funktion f ist in w komplex differenzierbar.
- (ii) Es gelten die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial h}{\partial y}(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) \quad \text{und} \quad \frac{\partial h}{\partial x}(w) = -\frac{\partial g}{\partial y}(w).$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, dann ist die komplexe Ableitung von f im Punkt w gegeben durch

$$f'(w) = \frac{\partial g}{\partial x}(w) + i \frac{\partial h}{\partial x}(w).$$

Jacobi-Matrix von $f_{\mathbb{R}}$ an der Stelle
 (x, y) :
$$\begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Dies ist genau die Darstellungsmatrix des
lin. Abg. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, w \mapsto 2z \cdot w$ bzgl
der Basis $(1, i)$. ($f'(z) = 2z$)

$$z = x + iy \rightarrow 2z \cdot 1 = 2z = 2x + i2y$$

$$2z \cdot i = 2(x + iy) \cdot i = -2y + 2xi$$