

Definition des Lebesgue-Integrals

- Es sei $\mathcal{L}_n$ der Abschluss von $\mathcal{C}_n$ im halbnormierten Raum $(\widehat{\mathcal{L}_n}, \|\cdot\|_1)$.
- Nach Satz 6.4 existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{I}$ der Funktion $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}_n$.

Definition (6.11)

Wir nennen die Elemente von $\mathcal{L}_n$ die **Lebesgue-integrierbaren** Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, und für jedes $f \in \mathcal{L}_n$ wird

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \bar{I}(f)$$

das **Lebesgue-Integral** von f genannt.

Ausformulierung der Definition

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ liegt und eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ existiert.
- Das Lebesgue-Integral von f ist in diesem Fall durch den Grenzwert

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) \, dx \quad \text{gegeben.}$$

- Für alle $f \in \mathcal{C}_n$ stimmt $\int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx$ mit dem Riemann-Integral $I(f)$ überein. (Wir werden sehen, dass dies für alle Riemann-integrierbaren Funktionen gilt, nicht nur für die stetigen.)

Lebesgue-Messbarkeit und Lebesguesche Nullmengen

Definition (6.14)

Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **endlich Lebesgue-messbar**, wenn die charakteristische Funktion χ_B Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall nennt man

$$\nu_{\mathcal{L}}(B) = \int_{\mathcal{L}} \chi_B(x) \, dx \quad \text{das Lebesgue-Maß von } B.$$

Die Menge B wird **Lebesguesche Nullmenge** genannt, wenn $\|\chi_B\|_1 = 0$ gilt.

Lebesgue-Integral auf Lebesgue-messbaren Mengen

Definition (6.19)

- (i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ wird **Lebesgue-messbar** genannt, wenn sie als abzählbare Vereinigung von endlich Lebesgue-messbaren Mengen darstellbar ist.
- (ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Wir bezeichnen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ als **Lebesgue-integrierbar**, wenn die Nullfortsetzung $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von f Lebesgue-integrierbar ist. Wir setzen in diesem Fall $\int_{A, \mathcal{L}} f(x) dx = \int_{\mathcal{L}} f_0(x) dx$.

Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral

Satz (6.20)

- (i) Jede Riemann-integrierbare Funktion auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Integrierbar, und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein.
- (ii) Jede Jordan-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, und der Jordan-Inhalt $v(A)$ stimmt mit dem Lebesgue-Maß $v_{\mathcal{L}}(A)$ überein.

Proposition (6.21)

Sei (g_k) eine Folge in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < +\infty$. Dann gilt

- (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)|$ konvergiert fast überall.
- (ii) Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass fast überall die Gleichung $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ erfüllt ist. Dann liegt g in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_1 = 0.$$

- (iii) Gilt $g_k \in \mathcal{L}_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $g \in \mathcal{L}_n$ und

$$\int g(x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int g_k(x) \, dx.$$

Beweis von Prop. 6.21

geg: Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\hat{L}_n$. $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1 < +\infty$

z.z. $\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ konvergiert fast überall

Sei $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \text{ divergiert}\}$

Dann gilt $\chi_D(x) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

dh $\chi_D \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |g_k|$ Prop 6.7 $\rightarrow \|\chi_D\|_1 \leq$

$\sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1$, jeweils für jedes $m \in \mathbb{N}$

Auf Grund der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1$ gilt es

für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 < \varepsilon$
 $\Rightarrow \|x_D\|_1 \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \|x_D\|_1 = 0 \Rightarrow D$ ist (Lebesguesche) Nullmenge

zu ii) Teil (i) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_1$ konvergiert fast überall $\Rightarrow \sum g_k$ konvergiert fast überall. Definiere $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ für alle x , in denen die Reihe konvergiert, und durch $g(x) = 0$ für alle übrigen x . Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ fast überall gegen g .

Es gilt $|g| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k|$ fast überall Prop. 6.7

$\Rightarrow g \in \hat{\mathcal{D}}_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_1 = 0, \quad \|g - \sum_{k=1}^n g_k\|_1 =$

$$\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} g_k \right\|_1 \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \|g_k\|_1 \Rightarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{k=1}^m g_k \right\|_1 = 0 \quad (*)$$

zu iii) Vor: $g_k \in L_n \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\sum_{k=1}^m g_k \in L_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

Somit folgt aus (*), dass auch g in L_n liegt, nach Prop. 6.12 (ii).

Prop 6.13 (iii) $\Rightarrow \int g(x) dx =$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int \left(\sum_{k=1}^m g_k(x) \right) dx =$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int g_k(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int g_m(x) dx, \quad \square$$

$$= 10$$

Satz von Beppo Levi über die monotone Konvergenz

Satz (6.22)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine fast überall monoton wachsende Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Folge der Integrale $\int_A f_m(x) \, dx$ beschränkt ist. Dann gibt es eine **Lebesgue-integrierbare Funktion** $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall gegen die Funktion f konvergiert, mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(x) \, dx = \int_A f(x) \, dx.$$

□ Beweis des Satzes von Beppo Levi:

O.B.d.A. können wir $A = \mathbb{R}^n$ setzen

Definiere $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ durch $g_1 = f_1$,
 $g_m = f_m - f_{m-1}$ für alle $m \geq 2$

Sei $C \in \mathbb{R}^+$ eine obere Schranke für

$\int f_m(x) dx, m \in \mathbb{N}$. $\Rightarrow$ erhalte für

jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^m \|g_k\|_1 = \|f_1\|_1 + \sum_{k=1}^m \int (f_k - f_{k-1})(x) dx$$

$$= \|f_1\|_1 + \int f_m(x) dx - \int f_1(x) dx$$

$$\leq 2\|f_1\|_1 + C$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$, konvergiert Prop 6.21

$\Rightarrow \sum g_n$ konvergiert punktweise fast
überall gegen eine Lebesgue-integrierbare
Funktion f , und $\int f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(x) dx$
 $= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int g_k(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int p_m(x) dx. \quad \square$

Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

Satz (6.23)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen $f_m : A \rightarrow \mathbb{R}$, die fast überall gegen eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion mit $|f_m| \leq g$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch f Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_A f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(x) \, dx.$$

Beweis von Satz 6.23

o B d A sei $A = \mathbb{R}^n$

Vor. Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in L_1 , konvergiert punktweise
fast überall gegen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. $g \in L_1$, nicht-
negativ, mit $|f_m| \leq g$ fast überall, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\text{z.z. } f \in L_1, \int f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx$$

Definiere für $m, v \in \mathbb{N}$ jeweils

$$g_{m,v} = \max \{ f_m, f_{m+1}, \dots, f_{m+v} \}$$

$$\text{und } g_m(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} g_{m,v}(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$g_{m,v} = \max\{f, g_m, \dots, g_{m+v}\}$$

$$g_m(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} g_{m,v}(x) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Die Folge $(g_{m,v})_{v \in \mathbb{N}}$ konvergiert monoton wachsend gegen g , die Folge der Integrale $\int g_{m,v}(x) dx$ ist durch $\int g(x) dx$ beschränkt. Boppo Levi $\Rightarrow$

$g_m(x)$ existiert als endl. Grenzwert fast überall, und

$$\int g_m(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} \int g_{m,v}(x) dx.$$

Die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert monoton fallend gegen f . Sie ist betragsmäßig durch $|g|$ beschränkt. Da der Satz von Boppo Levi auch für monoton fallende Folgen gültig ist, erhalten wir

$$\int f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m(x) dx$$

Definiere für jedes $m \in \mathbb{N}$ jeweils $h_m(x) = \inf_{i \geq m} |f_i(x)|$

in Analogie zu $g_m(x) = \sup \{ f_i(x) \mid i \geq m \}$
zeige genau wie zuvor, dass alle h_m
Lebesgue-integrierbar sind und
$$\int f(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int h_m(x) dx$$

beachte: $h_m \leq f_m \leq g_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \int h_m(x) dx \leq \int f_m(x) dx \leq \int g_m(x) dx$$

$\forall m \in \mathbb{N}$ Da die Integrale links und
rechts gegen $\int f(x) dx$ konvergieren
gilt dasselbe auch für $\int h_m(x) dx \quad \square$

Stetigkeit parameterabhängiger Integrale

Satz (6.24)

Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $x_0 \in X$ und $f : A \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Die Funktion $A \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ ist Lebesgue-integrierbar für alle $x \in X$.
- (ii) Es gibt eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf A , so dass für alle $x \in X$ jeweils $|f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist, für fast alle $t \in A$.
- (iii) Die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(t, x)$ ist für fast alle $t \in A$ stetig in x_0 .

Dann ist die Funktion $F(x) = \int_A f(t, x) \, dt$ **stetig** in x_0 .

Beweis von Satz 6.24.

Sei $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$

Definiere eine Fkt. folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ durch

$$f_m(t) = f(t, x_m) \quad \forall m \in \mathbb{N}, t \in A$$

Vor. (iii) $\Rightarrow (f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise
fast überall gegen $f_0 = f(x_0)$ Vor. (i) $\Rightarrow$ Jedes f_m

ist Lebesgue-integrierbar Vor. (ii) $\Rightarrow$

$|f_m| \leq g$ fast überall Satz 6.23 $\Rightarrow$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F(x_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f(t, x_m) dt =$$

$$F(x) = \int_A f(t, x) dt$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_A f_m(t) dt \stackrel{6.23}{=} \int_A f_0(t) dt \\ = \int_A f(t, x_0) dt = F(x_0)$$



Satz (6.25)

Sei V ein endlich-dimensionaler normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $U \subseteq V$ offen, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar, $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ und $f : A \times U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir setzen voraus, dass f die folgenden Eigenschaften besitzt.

- (i) Für alle $x \in U$ ist die Funktion $A \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t, x)$ Lebesgue-integrierbar.
- (ii) Es gibt eine Nullmenge $N \subseteq A$ und eine nicht-negative, Lebesgue-integrierbare Funktion g auf A , so dass die Richtungsableitung $\partial_v f(t, x)$ für alle $t \in A \setminus N$ und alle $x \in U$ existiert und jeweils $|\partial_v f(t, x)| \leq g(t)$ erfüllt ist.

Dann besitzt $F(x) = \int_A f(t, x) dt$ auf ganz U eine Richtungsableitung nach v , und es gilt $\partial_v F(x) = \int_A \partial_v f(t, x) dt$ für alle $x \in U$.