Der zentrale Fortsetzungssatz

Satz (6.4)

Sei (V, p) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Halbnorm, $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $\phi : U \to W$ eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert genau eine stetige Fortsetzung von ϕ zu einer Abbildung $\bar{\phi} : \bar{U} \to W$, und diese Abbildung ist wiederum linear.

Der Raum der stetigen Abbildung mit kompaktem Träger

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathscr{C}_n$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.
- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q^\circ \supseteq \mathrm{supp}(f)$, dann ist die Nullfortsetzung von f auf Q eine Riemann-integrierbare Funktion.
- Das Riemann-Integral $\int f(x)\,dx$ ist unabhängig von der Wahl des Quaders Q.

Majoranten und Obersummen

Definition (6.6)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $(g_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{C}_n$ mit $g_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ als Majorante von f, wenn die Bedingungen

$$|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} g_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < +\infty$$

erfüllt sind. Die reelle Zahl $\sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$ bezeichnen wir dann als Obersumme von f.

- Es bezeichne $\widehat{\mathscr{L}_n}$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die eine Majorante besitzen.
- Für jedes $f \in \widehat{\mathscr{L}_n}$ sei $\|f\|_1$ das Infimum der Menge aller Obersummen von f.

Der Raum $\widehat{\mathscr{L}_n}$ als halbnormierter $\mathbb{R}$-Vektorraum

Folgerung (6.8)

(i) Ist $f \in \widehat{\mathscr{L}_n}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt, dann liegt auch fg in $\widehat{\mathscr{L}_n}$, und es gilt $\|fg\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

(ii) Die Menge $\widehat{\mathscr{L}_n}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, der $\mathscr{C}_n$ als Untervektorraum enthält, und $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm auf $\widehat{\mathscr{L}_n}$.

Stetigkeit der Integralfunktion bezüglich der Halbnorm

Proposition (6.10)

(i) Für jedes $f \in \mathscr{C}_n$ mit $f \geq 0$ gilt $I(f) = \|f\|_1$.

(ii) Das positive lineare Funktional $I : \mathscr{C}_n \to \mathbb{R}$ ist stetig bezüglich der Halbnorm $\| \cdot \|_1$.

Definition des Lebesgue-Integrals

- Es sei $\mathscr{L}_n$ der Abschluss von $\mathscr{C}_n$ im halbnormierten Raum $(\widehat{\mathscr{L}_n}, \|\cdot\|_1)$.
- Nach Satz 6.4 existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{I}$ der Funktion $I : \mathscr{C}_n \to \mathbb{R}^n$ auf $\mathscr{L}_n$.

Definition (6.11)

Wir nennen die Elemente von $\mathscr{L}_n$ die Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, und für jedes $f \in \mathscr{L}_n$ wird

$$\int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx \quad = \quad \bar{I}(f)$$

das Lebesgue-Integral von f genannt.

Ausformulierung der Definiton

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathscr{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ existiert.
- Das Lebesgue-Integral von f ist in diesem Fall durch den Grenzwert
$$\int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{m \to \infty} \int f_m(x)\,dx \qquad \text{gegeben.}$$
- Für alle $f \in \mathscr{C}_n$ stimmt $\int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx$ mit dem Riemann-Integral $I(f)$ überein. (Wir werden sehen, dass dies für alle Riemann-integrierbaren Funktionen gilt, nicht nur für die stetigen.)

Eigenschaften des Raum $\mathscr{L}_n$

Proposition (6.12)

(i) Die Menge $\mathscr{L}_n$ ist ein Untervektorraum von $\widehat{\mathscr{L}_n}$.

(ii) Ist $f \in \widehat{\mathscr{L}_n}$ und $(f_m)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$, dann ist auch f in $\mathscr{L}_n$ enthalten.

(iii) Sind $f, g \in \mathscr{L}_n$, dann sind auch die Funktionen $|f|$, $f \wedge g$ und $f \vee g$ in $\mathscr{L}_n$ enthalten.

(iv) Sei $f \in \mathscr{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt. Ist g zusätzlich stetig oder $g \in \mathscr{L}_n$, dann folgt $fg \in \mathscr{L}_n$.

Beweis von Prop. 6.12:

zu (ii) geg $f \in \hat{\mathcal{L}}_n$, $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{m \to \infty} \|f_m - f\|_1$
$= 0$ z.zg: $f \in \mathcal{L}_n$. $f_m \in \mathcal{L}_m \Rightarrow \exists g_m \in \mathcal{C}_n$
mit $\|f_m - g_m\|_1 < \frac{1}{m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \|g_m - f\|_1 = \|(g_m - f_m) + (f_m - f)\|_1 \leq$
$\|f_m - g_m\|_1 + \|f_m - f\|_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ Aus
$\lim_{m \to \infty} \|f_m - f\|_1 = 0$ folgt also $\lim_{m \to \infty} \|g_m - f\|_1$
$= 0$ Also gilt $f \in \mathcal{L}_n$.

zu (iii) geg: $f, g \in \mathcal{L}_n$ z.zg. $|f|, f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{L}_n$

$\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_1 = 0$ folgt also $\lim_{m\to\infty} \|g_m - f\|_1$

$f \in \mathcal{L}_n \Rightarrow \exists (f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_1 = 0$

Mit $f_m \in \mathcal{C}_n$ gilt auch $|f_m| \in \mathcal{C}_n$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

außerdem: $||f_m| - |f|| \leq |f_m - f| \Rightarrow \||f_m| - |f|\|_1 \leq$

$\|f_m - f\|_1 \overset{\text{Vor.}}{\Longrightarrow} \lim_{m\to\infty} \||f_m| - |f|\|_1 = 0 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_n$

Es gilt $f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$, $f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$

und $\mathcal{L}_n$ ist Untervektorraum $\Rightarrow f \wedge g, f \vee g \in \mathcal{L}_n$

zu (i), (iv) siehe Skript $\square$

Rechenregeln für das Lebesgue-Integral

Proposition (6.13)

(i) Seien $f, g \in \mathscr{L}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\int_{\mathscr{L}} (f+g)(x)\,dx = \int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx + \int_{\mathscr{L}} g(x)\,dx$ und $\int_{\mathscr{L}} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx$.

(ii) Für alle $f \in \mathscr{L}_n$ gilt $\left|\int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx\right| \le \int_{\mathscr{L}} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$.

(iii) Ist $f \in \mathscr{L}_n$ und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$, dann ist $\lim_m \int_{\mathscr{L}} f_m(x)\,dx = \int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx$.

(iv) Aus $f \ge 0$ folgt $\int_{\mathscr{L}} f(x)\,dx \ge 0$.

(v) Sei $f \in \mathscr{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ beschränkt und außerdem stetig oder in $\mathscr{L}_n$ enthalten. Dann gilt die Abschätzung $|\int_{\mathscr{L}} f(x)g(x)\,dx| \le \|g\|_\infty \int_{\mathscr{L}} |f(x)|\,dx$.

Beweis von Prop (6.13) (ii)

geg: $f \in \mathcal{L}_1$ z.zg. $\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \right| \le$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \|f\|_1$$

$f \in \mathcal{L}_1 \Rightarrow \exists$ Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_1$

mit $\lim\limits_{m \to \infty} \|f_m - f\|_1 = 0$ Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{m \to \infty} I(f_m)$$

$$\big||f_m| - |f|\big| \le |f_m - f| \quad \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\big\||f_m| - |f|\big\|_1 \le \|f_m - f\|_1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx \right| \le \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - I(f_m) \right|$$

$$+ \; |I(f_m)| \le \left| \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx - I(f_m) \right|$$

$$+ I(|f_m|) \underset{m\to\infty}{\Longrightarrow} \left| \int_{\mathcal{L}} f(x)\, dx \right| \le \int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx$$

außerdem: $\int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx = \int_{\mathcal{L}} |f_m(x)|\, dx +$

$$\left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx - \int_{\mathcal{L}} |f_m(x)|\, dx \right) =$$

$$I(|f_m|) + \left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx - I(|f_m|) \right) =$$

$$\|f_m\|_1 + \left(\int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx - I(|f_m|) \right)$$

$$m \to \infty \Longrightarrow \int_{\mathcal{L}} |f(x)|\, dx = \|f\|_1 + 0 = \|f\|_1 \quad \square$$

Lebesgue-Messbarkeit und Lebesguesche Nullmengen

Definition (6.14)

Eine Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt endlich Lebesgue-messbar, wenn die charakteristische Funktion χ_B Lebesgue-integrierbar ist. In diesem Fall nennt man

$$v_{\mathscr{L}}(B) \quad = \quad \int_{\mathscr{L}} \chi_B(x)\, dx \qquad \text{das Lebesgue-Maß von } B.$$

Die Menge B wird Lebesguesche Nullmenge genannt, wenn $\|\chi_B\|_1 = 0$ gilt.

Nullmengen und Lebesguesche Nullmengen

Proposition (6.15)

(i) Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lebesguesche Nullmenge, wenn sie endlich Lebesgue-messbar ist und $v_{\mathscr{L}}(N) = 0$ gilt.

(ii) Jede Nullmenge ist eine Lebesguesche Nullmenge.

Umgekehrt kann man zeigen, dass jede Lebesguesche Nullmenge eine Nullmenge ist, die beiden Begriffe sind also äquivalent.

Vernachlässigung Lebesguescher Nullmengen

Proposition (6.16)

Seien $f \in \mathscr{L}_n$, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \notin N$. Dann ist auch $\tilde{f}$ Lebesgue-integrierbar, und die Lebesgue-Integrale von f und $\tilde{f}$ stimmen überein.

Treppenfunktionen bezüglich einer Zerlegung

Definition (6.17)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von Q. Wir bezeichnen $f : Q \to \mathbb{R}$ als Treppenfunktion bezüglich $\mathscr{Z}$, wenn $f|_{K^\circ}$ für jedes $K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})$ konstant ist. Wir bezeichnen dieses konstanten Wert dann jeweils mit c_K.

Lebesgue-Integrierbarkeit von Treppenfunktionen

Lemma (6.18)

Sei Q ein Quader und $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von Q.

(i) Die charakteristische Funktion χ_Q ist Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\int_{\mathscr{L}} \chi_Q = v(Q)$.

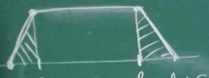
(ii) Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich Q, dann ist f Lebesgue-integrierbar, und es gilt $\int_{\mathscr{L}} f(x)\, dx = \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} c_K v(K)$.

Beweis von Lemma 6.18:

geg.: $I = [a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

Definiere für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Funktion

$$\chi_{I,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < a-\varepsilon \text{ oder } x > b+\varepsilon \\ 1 & \text{falls } a \leq x \leq b \\ \frac{1}{\varepsilon}(x-a+\varepsilon) & \text{falls } a-\varepsilon < x < a \\ \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon-x+b) & \text{falls } b < x < b+\varepsilon \end{cases}$$



Setze außerdem $\delta_{I,\varepsilon} = \chi_{\{a\},\varepsilon} + \chi_{\{b\},\varepsilon}$

Es gilt $\int \chi_{I,\varepsilon}(x)\,dx = (b-a)+\varepsilon$ und $\int \delta_{I,\varepsilon}(x)\,dx = 2\varepsilon$

Definiere für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ die Funktion

Sei nun Q ein Quader im $\mathbb{R}^n$, $Q = I_1 \times \dots \times I_n$,

$I_j = [a_j, b_j]$ $(1 \le j \le n)$

Setze $\chi_{Q,\varepsilon} = \prod_{j=1}^{n} \chi_{I_j,\varepsilon}$, $\delta_{Q,\varepsilon} = \prod_{j=1}^{n} \delta_{I_j,\varepsilon}$

Diese Funktionen sind in $\mathcal{C}_n$ enthalten

Fubini $\Rightarrow$ $I(\chi_{Q,\varepsilon}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j + \varepsilon)$,

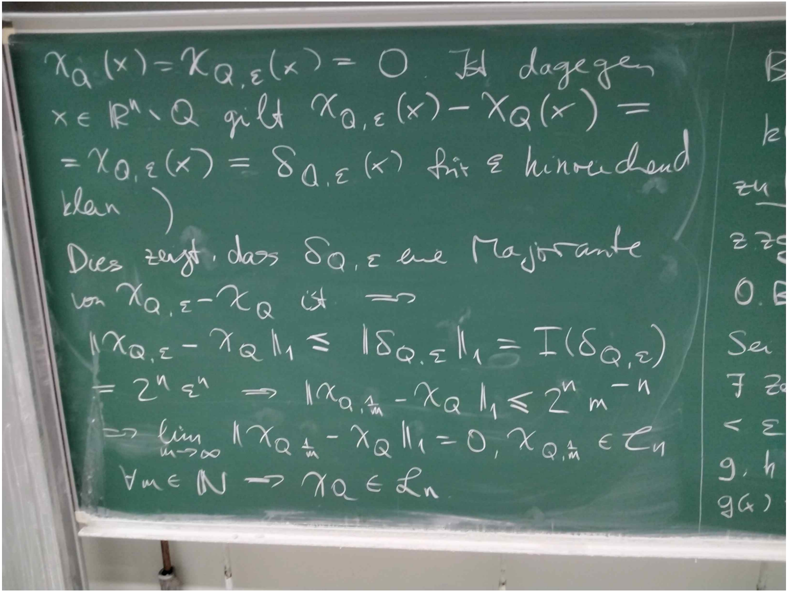
$I(\delta_{Q,\varepsilon}) = 2^n \varepsilon^n$

beachte: $\chi_Q \le \chi_{Q,\varepsilon}$ für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow$ χ_Q hat eine Majorante $\Rightarrow$ $\chi_Q \in \hat{\mathcal{L}}_n$

überprüfe: Für hinreichend kleines ε gilt

$\chi_{Q,\varepsilon} - \chi_Q \le \delta_{Q,\varepsilon}$ (Grund: ~~Ist~~ $x \in Q$, dann gilt



Korrekturanmerkung siehe nächste Seite

Die Gleichung $\chi_{Q,\varepsilon}(x) = \delta_{Q,\varepsilon}(x)$ ist mit der zuvor definierten Funktion $\delta_{Q,\varepsilon}$ in der dritten Zeile ist nicht für alle Punkte $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ korrekt. Man muss $\delta_{Q,\varepsilon}$ nicht als das Produkt, sondern als das Maximum der Funktionen $\delta_{I_j,\varepsilon}$, $1 \leq j \leq n$ definieren. Ich habe das im Skript ausgebessert.

außerdem: $\int_{\mathbb{R}} \chi_Q(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} I(\chi_{Q,\frac{1}{m}})$

$= \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j + \frac{1}{m}) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)$

$= v(Q)$. $\square$

zu (ii) siehe Skript.

W

en

f

$\|$

$=$

Für

g_m,

$\Rightarrow$

Übereinstimmung von Riemann- und Lebesgue-Integral

Satz (6.19)

(i) Jede Riemann-integrierbare Funktion auf einem Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-Integrierbar, und das Riemann-Integral stimmt mit dem Lebesgue-Integral überein.

(ii) Jede Jordan-messbare Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Lebesgue-messbar, und der Jordan-Inhalt $v(A)$ stimmt mit dem Lebesgue-Maß $v_{\mathscr{L}}(A)$ überein.

Beweis von Satz 6.19

klar: Teil (ii) folgt direkt aus (i)

zu (i) geg: $f: Q \to \mathbb{R}$ Riemann-int.

zzg: $f \in \mathcal{L}_n$, $\int_{\mathcal{L}} f(x)\,dx = \int f(x)\,dx$

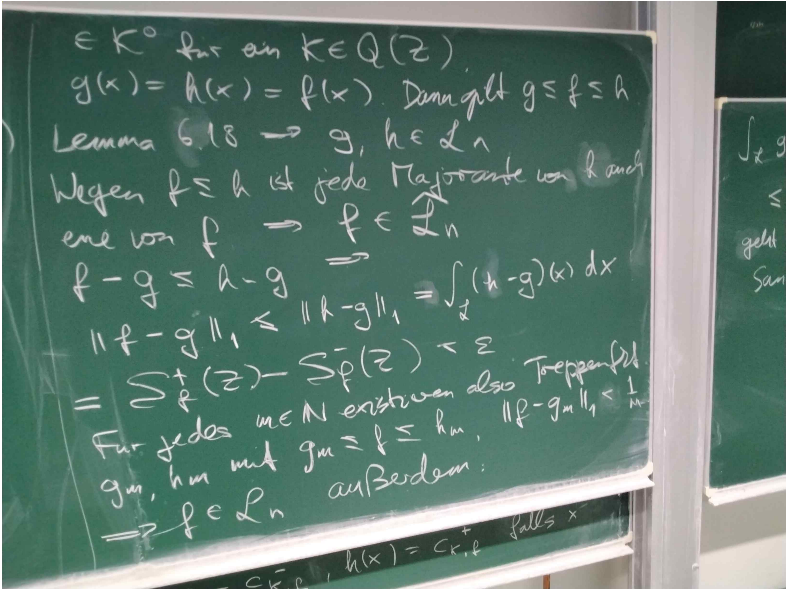
O.B.d.A. sei $f \geq 0$.

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. f Riemann-int. $\Rightarrow$

$\exists$ Zerlegung Z mit $S_f^+(Z) - S_f^-(Z) < \varepsilon$. Definiere zwei Treppenfkt.

$g, h: Q \to \mathbb{R}$ durch

$g(x) = c_{k,f}^-$, $h(x) = c_{k,f}^+$ falls x



Am Ende der ersten Zeile fehlt das Wort „ansonsten“.

$$\int_{\mathcal{L}} g_m(x)\,dx = S_f^-(Z_m) \le \int f(x)\,dx,\ \int_{\mathcal{L}} f(x)\,dx$$

$$\le \int_{\mathcal{L}} h_m(x)\,dx = S_f^+(Z_m)$$

Für $m \to \infty$ geht die Differenz $S_f^+(Z_m) - S_f^-(Z_m)$ gegen 0

Sandwich-Lemma $\Rightarrow \int f(x)\,dx = \int_{\mathcal{L}} f(x)\,dx$. $\square$