

§ 6. Einführung in die Lebesguesche Integrationstheorie

Definition (6.1)

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum bestehend aus reellwertigen Funktionen auf einer Menge X . Ein **positives Funktional** auf V ist dann eine lineare Abbildung $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $\phi(f) \geq 0$ für alle $f \in V$ mit $f \geq 0$ gilt.

Definition der Halbnormen

Definition (6.2)

Eine Abbildung $p : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ auf einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V wird **Halbnorm** auf V genannt, wenn die Bedingungen $p(\lambda v) = |\lambda|p(v)$ und $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ für alle $v, w \in V$ erfüllt sind.

Jede Halbnorm definiert eine **Topologie** auf V .

Der Abschluss eines Untervektorraums

Lemma (6.3)

Ist (V, p) ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Halbnorm und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, dann ist auch der Abschluss $\bar{U}$ von U in V ein Untervektorraum.

- Eine Halbnorm induziert (im Gegensatz zu einer Norm) **keine Metrik** auf V .
- Dennoch ist die **Konvergenz** auch hier ein sinnvoller Begriff. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist aber **nicht** mehr eindeutig bestimmt.
- Der Begriff der **stetigen Abbildung** zwischen einem halbnormierten und einem metrischen Raum ist auf naheliegende Weise definiert.

Beweis von Lemma 6.3:

V $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $U \subseteq V$, p Halbnorm auf V

$\bar{U}$ = Abschluss von U bzgl. p

$$= \{x \in V \mid \text{Jede Umg. von } x \text{ enthält ein } u \in U\} \supseteq U$$

klar: $0_V \in U \Rightarrow 0_V \in \bar{U}$

Seien $v, w \in \bar{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgeg.

z.zg.: $v+w \in \bar{U}$, $\lambda v \in \bar{U}$, o.B.d.A. $\lambda \neq 0$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. zeige: $B_{\varepsilon, p}(v+w) =$

$\{y \in V \mid p(y - (v+w)) < \varepsilon\}$ enthält ein Element

aus U . $v, w \in \bar{U} \Rightarrow \exists v' \in B_{\varepsilon, p}(v) \cap U$.

Seien $v, w \in \bar{U}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgeg.

$\exists v' \in B_{\varepsilon/2, p}(w) \cap U$ $v', w' \in U, U \leq v \Rightarrow v' + w' \in U$, außerdem: $p((v' + w') - (v + w)) = p(v - v' + w - w') \leq p(v - v') + p(w - w') < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow v' + w' \in B_{\varepsilon, p}(v + w) \cap U$ also $v + w \in \bar{U}$

$v \in \bar{U} \Rightarrow \exists v'' \in B_{\varepsilon/|\lambda|, p}(v) \cap U$ $v'' \in U, U \leq v \Rightarrow \lambda v'' \in U$ $v'' \in B_{\varepsilon/|\lambda|, p}(v) \Rightarrow p(v'' - v) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$
 $\Rightarrow p(\lambda v'' - \lambda v) = |\lambda| p(v'' - v) < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$
also: $\lambda v'' \in B_{\varepsilon, p}(\lambda v)$ also $\lambda v \in \bar{U}$. $\square$

Der zentrale Fortsetzungssatz

Satz (6.4)

Sei (V, p) ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Halbnorm, $(W, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $\phi : U \rightarrow W$ eine stetige lineare Abbildung. Dann existiert genau eine **stetige Fortsetzung** von ϕ zu einer Abbildung $\bar{\phi} : \bar{U} \rightarrow W$, und diese Abbildung ist wiederum linear.

Beweis von Satz 6.4:

(V, p) halbnormierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$U \subseteq V$, $\phi: U \rightarrow W$ stetige lin. Abb.

in einen Banachraum W

z.zg.: Es gibt eine unid. bestimmte
stetige Fortsetzung $\bar{\phi}: \bar{U} \rightarrow W$
von ϕ

Eindeutigkeit: Ang. $\psi, \psi': \bar{U} \rightarrow W$
sind stetige Fortsetzungen von ϕ . Sei

$v \in \bar{U}$. z.zg.: $\psi(v) = \psi'(v)$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein u_n in

$U \cap B_{n,p}(v)$ Damit ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 eine Folge in U , die bzgl. p gegen v
 konvergiert. ψ, ψ' sind stetig in v

$$\Rightarrow \psi(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'(u_n) = \psi'(v)$$

Existenz. Sei $v \in U$ vorgeg.
 Wähle (wie oben) eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
 in U , die gegen v konvergiert.

Beh. $(\phi(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-
 Folge in W

$\phi: U \rightarrow W$ ist stetig im Nullpunkt.
 Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. $\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}^+$ mit

$p(u_n)$

$p(u_n)$

$p(u_n)$

$\Rightarrow p(u_n)$

$p(v-u_n)$

s.o. $\Rightarrow$

$(\Rightarrow$ Beh

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \phi$

Definiere

$$p(u) < \delta \Rightarrow \|\phi(u)\| < \varepsilon \quad \forall u \in U$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $v \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$.

$$p(u_n - v) < \frac{1}{2}\delta \quad \forall n \geq N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(u_n - u_m) &= p(u_n - v + v - u_m) \leq p(u_n - v) + \\ p(v - u_m) &< \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta = \delta \quad \forall m, n \geq N \end{aligned}$$

$$\text{s.o.} \Rightarrow \|\phi(u_n) - \phi(u_m)\| = \|\phi(u_n - u_m)\| < \varepsilon$$

($\Rightarrow$ Beh.) W ist vollständig (da Banachraum)

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(u_n) = w \text{ f\"ur ein } w \in W$$

Definiere nun $\bar{\phi}(v) := w$ (Rest siehe Skript)



Der Raum der stetigen Abbildung mit kompaktem Träger

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{C}_n$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.
- Ist $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q^\circ \supseteq \text{supp}(f)$, dann ist die Nullfortsetzung von f auf Q eine Riemann-integrierbare Funktion.
- Das Riemann-Integral $\int f(x) dx$ ist **unabhängig** von der Wahl des Quaders Q .

Verbände als spezielle Halbordnungen

- Eine halbgeordnete Menge $(X, \leq)$ nennt man einen **Verband**, wenn für alle $x, y \in X$ die Teilmenge $\{x, y\}$ ein Infimum und ein Supremum besitzt.
- Man bezeichnet das Infimum mit $x \wedge y$, das Supremum mit $x \vee y$.

Eigenschaften des Raums $\mathcal{C}_n$

Proposition (6.5)

- (i) Die Menge $\mathcal{C}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, mit der punktweisen Addition und Multiplikation.
- (ii) Die Menge $\mathcal{C}_n$ ist bezüglich der Halbordnung definiert durch $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq g(x)$ ein Verband, mit $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ und $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
- (iii) Die Abbildung $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$ ist ein positives lineares Funktional, und es gilt $|I(f)| \leq I(|f|)$ für alle $f \in \mathcal{C}_n$.

Majoranten und Obersummen

Definition (6.6)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}_n$ mit $g_m \geq 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ als **Majorante** von f , wenn die Bedingungen

$$|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} g_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < +\infty$$

erfüllt sind. Die reelle Zahl $\sum_{m=1}^{\infty} I(g_m)$ bezeichnen wir dann als **Obersumme** von f .

- Es bezeichne $\widehat{\mathcal{L}}_n$ die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die eine Majorante besitzen.
- Für jedes $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ sei $\|f\|_1$ das Infimum der Menge aller Obersummen von f .

Summierbarkeitseigenschaft von $\|\cdot\|_1$

Proposition (6.7)

Sei $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ mit $\sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1 < +\infty$ und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $|f| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |g_m|$. Dann ist auch f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ enthalten, und es gilt $\|f\|_1 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|g_m\|_1$.

Der Raum $\widehat{\mathcal{L}}_n$ als halbnormierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Folgerung (6.8)

- (i) Ist $f \in \widehat{\mathcal{L}}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, dann liegt auch fg in $\widehat{\mathcal{L}}_n$, und es gilt $\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.
- (ii) Die Menge $\widehat{\mathcal{L}}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, der $\mathcal{C}_n$ als Untervektorraum enthält, und $\|\cdot\|_1$ ist eine **Halbnorm** auf $\widehat{\mathcal{L}}_n$.

Beweis von Folgerung 6.8, Teil (ii)

zeige: $\hat{\mathcal{L}}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum

genügt: $\hat{\mathcal{L}}_n$ ist ein Untervektorraum im $\mathbb{R}$ -
Vektorraum aller Fkt. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Die Nullfkt. 0 liegt in $\hat{\mathcal{L}}_n$, denn $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$

bestehend aus $g_m = 0 \forall m \in \mathbb{N}$ ist eine Majorante

Seien nun $f, g \in \hat{\mathcal{L}}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgeg.

z.zg: $f+g, \lambda f \in \hat{\mathcal{L}}_n$

$f, g \in \hat{\mathcal{L}}_n \Rightarrow f, g$ haben Majoranten

zeige: $\mathcal{L}_n$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum

genügt: $\hat{\mathcal{L}}_n$ ist ein Untervektorraum im $\mathbb{R}$ -

$\sum_{m=1}^{\infty} f_m, \sum_{m=1}^{\infty} g_m$ Beh.: $\sum_{m=1}^{\infty} (f_m + g_m)$ ist Majorante

von $f+g$ $|f+g|(x) \leq |f(x)| + |g(x)| \leq$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (f_m + g_m)(x)$$

$$\text{und } \sum_{m=1}^{\infty} I(f_m + g_m) = \sum_{m=1}^{\infty} (I(f_m) + I(g_m)) =$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} I(f_m) + \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < +\infty \quad (\Rightarrow \text{Beh.})$$

also: $f+g \in \hat{\mathcal{L}}_n$ Beweis von $\lambda f \in \hat{\mathcal{L}}_n$: analog

Zeige noch, dass $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ gilt.

genügt z.zg.: Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es eine Obersumme

von $f+g$ kleiner als $\|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon$
(denn daraus folgt $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon$)

Nach Def von $\|f\|_1$ gibt es eine Majorante $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ von f mit $\sum_{m=1}^{\infty} I(f_m) < \|f\|_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, und ebenso eine Majorante $\sum g_m$ von g mit $\sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) < \|g\|_1 + \frac{1}{2}\varepsilon$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n + g_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n) + \sum_{n=1}^{\infty} I(g_n) < \|f\|_1 + \|g\|_1 + \varepsilon$$

Rest: siehe Skript $\square$

Der Satz von Dini

Satz (6.9)

Sei X ein kompakter metrischer Raum und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine **monoton wachsende** Folge stetiger Funktionen $f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ **punktweise** gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auch **gleichmäßig** gegen f .

Stetigkeit der Integralfunktion bezüglich der Halbnorm

Proposition (6.10)

- (i) Für jedes $f \in \mathcal{C}_n$ mit $f \geq 0$ gilt $I(f) = \|f\|_1$.
- (ii) Das positive lineare Funktional $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}$ ist **stetig** bezüglich der Halbnorm $\|\cdot\|_1$.

ranke $\sum_{m=1}^{\infty} f_m$ von f mit $\sum I(f_m)$

Beweis von Prop 6.10:

zu (i) geg. $f \in \mathcal{L}_n$, $f \geq 0$

$$\text{z.zg. } I(f) = \|f\|_1$$

Die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$ geg. durch $g_1 = f$,
 $g_m = 0$ für $m \geq 2$ ist (offensichtlich)

eine Majorante von f , somit ist

$I(f)$ eine Obersumme $\Rightarrow \|f\|_1 \leq$

$I(f)$ nach Def. von $\|f\|_1$ zu zeigen

ist noch $I(f) \leq \|f\|_1$. Sei $\sum_{m=1}^{\infty} g_m$

eine bel. Majorante von f z.zg.

$$I(f) \leq \sum_{m=1}^{\infty} I(g_m) \quad (*)$$

Definiere für jedes m jeweils

$$h_m = f \wedge \left(\sum_{k=1}^m g_k \right)$$

Prop. 6.5 (ii) $\Rightarrow h_m \in \mathcal{L}_n \quad \forall m \in \mathbb{N}$

klar: $\text{supp}(h_m) \subseteq \text{supp}(f)$

überprüfe: $h_m \rightarrow f$ punktweise

$$\text{Sei } \varepsilon \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{m=1}^{\infty} g_m(x) \geq f(x)$$

$$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^m g_k(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall m \geq M$$

$$\Rightarrow f(x) - \varepsilon < h_m(x) \leq f(x) \quad \forall m \geq M$$

$(h_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton w., punktweise konvergent
gegen f . f & h_m alle stetig $\xrightarrow{\text{Satz v. Dini}}$

überprüfe: $h_n \rightarrow f$ punktweise

$h_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $\text{supp}(f)$, damit
auf ganz $\mathbb{R}^n$. Lemma 4.14 $\Rightarrow$ in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(h_n) = I(f), \quad I(h_n) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k) \\ \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k) \Rightarrow I(f) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(g_k)$$

d.h. (*) ist gezeigt.

zu iii) Beh.: I ist auf C_n stetig bzgl. $\|\cdot\|_1$

Sei $f \in C_n$ und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - f\|_1$

$$= 0. \text{ Teil (i)} \Rightarrow |I(g_n) - I(f)| = |I(g_n - f)|$$

$$\leq I(\|g_n - f\|) = \|g_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I(g_n) = I(f) \quad \square$$

Definition des Lebesgue-Integrals

- Es sei $\mathcal{L}_n$ der Abschluss von $\mathcal{C}_n$ im halbnormierten Raum $(\widehat{\mathcal{L}_n}, \|\cdot\|_1)$.
- Nach Satz 6.4 existiert eine eindeutige Fortsetzung $\bar{I}$ der Funktion $I : \mathcal{C}_n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}_n$.

Definition (6.11)

Wir nennen die Elemente von $\mathcal{L}_n$ die **Lebesgue-integrierbaren** Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$, und für jedes $f \in \mathcal{L}_n$ wird

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) dx = \bar{I}(f)$$

das **Lebesgue-Integral** von f genannt.

Ausformulierung der Definition

- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn f in $\widehat{\mathcal{L}}_n$ liegt und eine Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$ existiert.
- Das Lebesgue-Integral von f ist in diesem Fall durch den Grenzwert

$$\int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) \, dx \quad \text{gegeben.}$$

- Für alle $f \in \mathcal{C}_n$ stimmt $\int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx$ mit dem Riemann-Integral $I(f)$ überein. (Wir werden sehen, dass dies für alle Riemann-integrierbaren Funktionen gilt, nicht nur für die stetigen.)

Eigenschaften des Raum $\mathcal{L}_n$

Proposition (6.12)

- (i) Die Menge $\mathcal{L}_n$ ist ein Untervektorraum von $\widehat{\mathcal{L}}_n$.
- (ii) Sind $f, g \in \mathcal{L}_n$, dann sind auch die Funktionen $|f|$, $f \wedge g$ und $f \vee g$ in $\mathcal{L}_n$ enthalten.
- (iii) Sei $f \in \mathcal{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Ist g zusätzlich stetig oder $g \in \mathcal{L}_n$, dann folgt $fg \in \mathcal{L}_n$.

Rechenregeln für das Lebesgue-Integral

Proposition (6.13)

- (i) Seien $f, g \in \mathcal{L}_n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\int_{\mathcal{L}} (f + g)(x) \, dx = \int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx + \int_{\mathcal{L}} g(x) \, dx$$
und
$$\int_{\mathcal{L}} (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx.$$
- (ii) Für alle $f \in \mathcal{L}_n$ gilt $\left| \int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx \right| \leq \int_{\mathcal{L}} |f(x)| \, dx = \|f\|_1$.
- (iii) Ist $f \in \mathcal{L}_n$ und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}_n$ mit $\lim_m \|f_m - f\|_1 = 0$, dann ist $\lim_m \int_{\mathcal{L}} f_m(x) \, dx = \int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx$.
- (iv) Aus $f \geq 0$ folgt $\int_{\mathcal{L}} f(x) \, dx \geq 0$.
- (v) Sei $f \in \mathcal{L}_n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und außerdem stetig oder in $\mathcal{L}_n$ enthalten. Dann gilt die Abschätzung
$$\left| \int_{\mathcal{L}} f(x) g(x) \, dx \right| \leq \|g\|_{\infty} \int_{\mathcal{L}} |f(x)| \, dx.$$