## Definition der Divergenz

**Definition (5.28)**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann nennt man die Funktion $\mathrm{div}(F) : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\mathrm{div}(F)(p) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \partial_k F_k(p) \qquad \text{die Divergenz von } F.$$

## Gauß'scher Integralsatz der Ebene

### Satz (5.29)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge, die eine positiv orientierte Randkurve $\gamma$ und Zerlegungen in Normalbereiche sowohl bezüglich der $x$- als auch bezüglich der $y$-Achse besitzt. Sei $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^2$ ein äußeres Einheitsnormalenfeld. Dann kann die positiv orientierte Randkurve so gewählt werden, dass für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F$ auf $A$ die Gleichung

$$\int_\gamma \langle F, \nu \rangle \, ds \quad = \quad \int_A \mathrm{div}(F)(x,y) \; d(x,y) \qquad \text{erfüllt ist.}$$

Ränder von 3-dim. Normalbereichen als orientierte stückweise $\mathcal{C}^1$-Flächen


$A \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt Jordan-messbar

mit einer positiv orientierten Randkurve

$\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$-Funktionen mit $\varphi \le \psi$

Normalbereich bzgl. der $z$-Achse

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$

Deckel $D^+ = \{(x,y,\psi(x,y)) \mid (x,y) \in A\}$

$D^- = \{(x,y,\varphi(x,y)) \mid (x,y) \in A\}$

$D^- = \{ (x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in A \}$

Mantel $M = \{ (\tau(t), z) \mid t \in [a, b], \varphi(\tau(t)) \leq z \leq \psi(\tau(t)) \}$ Dann ist $\partial B = D^+ \cup D^- \cup M$.

Sei $Z = \{t_1, \dots, t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $t_0 = a$, $t_m = b$. Dann gilt $M = M_1 \cup \dots \cup M_m$ wobei $M_j = \{ (\tau(t), z) \in M \mid t \in [t_{j-1}, t_j] \}$

Parametrisierungen der Deckel:

$\phi^+ : A \to D^+, (x, y) \mapsto (x, y, \psi(x, y))$

$\phi^- : A^t \to D^-, (x, y) \mapsto (y, x, \varphi(y, x))$

wobei $A^t = \{ (y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A \}$

Parametrisierung der Mantelkomponenten:

$\phi_j^0 : C_k \to M_k, (t, z) \mapsto (\tau(t), z), C_k = \{ (t, z) \in \mathbb{R}^2 \mid$

$t \in [t_{j-1}, t_j], \ (\varphi \circ \tau)(t) \leq z \leq (\psi \circ \tau)(t) \}$

Bestimmung des Einheitsnormalenfeldes $\nu$ auf $\partial B$

(1) auf $D^+$: $(\phi^+)'(x,y)(e_1) \times (\phi^+)'(x,y)(e_2)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_1 \psi(x,y) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_2 \psi(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_1 \psi(x,y) \\ -\partial_2 \psi(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|(\phi^+)'(x,y)(e_1) \times (\phi^+)'(x,y)(e_2)\|_2 = \sqrt{1 + \|(\nabla \psi)(x,y)\|_2^2}$$

$$\nu(\phi^+(x,y)) = (1 + \|(\nabla \psi)(x,y))^{-1/2} (\phi^+)'(x,y)(e_1) \times (\phi^+)'(x,y)(e_2) \text{ für alle } (x,y) \in A$$

(2) auf $D^-$: Vorgehensweise analog, $\nu(\phi^-(x,y))$ zeigt „nach unten"

(3) auf der Mantelfläche: Sei $t \in [a,b]$ sodass $\tau$ in $t$ stetig diff'bar, $j \in \{1,\dots,m-1\}$ mit $t \in ]t_{j-1}, t_j[$

$$(\phi_j^0)'(t,z)(e_1) \times (\phi_j^0)'(t,z)(e_2) =$$

$$\begin{pmatrix} \tau_1'(t) \\ \tau_2'(t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_2'(t) \\ -\tau_1'(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Länge: } \|\tau'(t)\|_2$$

$$\nu(\phi_j^0(t,z)) = \|\tau'(t)\|^{-1} \begin{pmatrix} \tau_2'(t) \\ -\tau_1'(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\times (\phi^+)'(x,y)(e_2)$ für alle $(x,y) \in A$

# Zerlegungen in räumliche Normalbereiche

## Definition (5.30)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\nu : \partial B \to \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektorfeld derart, dass $(\partial B, \nu)$ die Struktur einer orientierten kompakten stückweisen $\mathscr{C}^1$-Fläche besitzt. Unter einer Zerlegung von $B$ in Normalbereiche bezüglich der $z$-Achse verstehen wir eine endliche Familie $N_1, ..., N_r$ von Normalbereichen ausgestattet mit Einheitsnormalenfeldern $\nu_1, ..., \nu_r$ der oben definierten Form und folgenden Eigenschaften.

(i) Es gilt $B = \bigcup_{i=1}^r N_i$, und für $i \neq j$ schneiden sich $N_i$ und $N_j$ höchstens in Randpunkten.

(ii) Die Ränder von $B$ und den $N_i$ können so in $\mathscr{C}^1$-Komponenten zerlegt werden, dass jede Randkomponente $(A_i, \phi_i)$ von $N_i$ jeweils eine der folgenden beiden Bedingungen gilt: Entweder sie stimmt mit einer Randkomponente von $B$ überein, und es gilt $\nu(\phi_i(p)) = \nu_i(\phi_i(p))$ für alle $p \in A_i^\circ$. Oder es gibt eine Randkomponente $(A_j, \phi_j)$ von einem $N_j$ mit $j \neq i$, so dass $\phi_i(A_i) = \phi_j(A_j)$ und $\nu_j(\phi_i(p)) = -\nu_i(\phi_i(p))$ für alle $p \in A_i^\circ$ erfüllt ist.

## Gauß'scher Integralsatz im Raum

### Satz (5.31)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ eine kompakte Teilmenge und $\nu : \partial B \to \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektorfeld derart, dass $(\partial B, \nu)$ die Struktur einer orientierten kompakten stückweisen $\mathscr{C}^1$-Fläche besitzt. Außerdem setzen wir voraus, dass $B$ eine Zerlegung in Normalbereiche bezüglich der $x$-Achse besitzt, und ebenso eine Zerlegung in Normalbereiche bezüglich der $y$-Achse und der $z$-Achse. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : B \to \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\int_{(\partial B, \nu)} \langle F, dA \rangle \quad = \quad \int_B \mathrm{div}(F)(x, y, z)\ d(x, y, z).$$

Beweis des räumlichen Gauß'schen Integralsatzes

Nach Def. der Divergenz gilt

$$\int_B \mathrm{div}(F)(x,y,z)\,d(x,y,z) = \sum_{k=1}^{3} \int_B \partial_k F_k(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

linke Seite: $\displaystyle\int_{(\partial B,\nu)} \langle F, dA\rangle \overset{(5.22)}{=} \sum_{k=1}^{3} \int_{(\partial B,\nu)} F_k \nu_k \, dA$

Es genügt z.zg. $\displaystyle\int_B \partial_k F_k(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{(\partial B,\nu)} F_k \nu_k \, dA$ für $k=1,2,3$ $(*)$

Beweis für $k=3$ im Fall, dass $B$ ein Normal-

bereich bzgl. der $z$-Achse ist, mit Begrenzungs-
funktionen $\varphi, \psi : A \to \mathbb{R}$ $(\varphi \leq \psi,\ A \subseteq \mathbb{R}^2)$

linke Seite von $(*)$

$$\int_B \partial_3 F_3(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_A \Big( \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \partial_3 F_3(x,y,z)\, dz \Big) d(x,y)$$

$$= \int_A \big( F_3(x,y,\psi(x,y)) - F_3(x,y,\varphi(x,y)) \big)\, d(x,y)$$

rechte Seite von $(*)$

$$\int_{(\partial B,\nu)} F_3 \nu_3\, dA = \int_{(D^+,\nu)} F_3 \nu_3\, dA + \int_{(D^-,\nu)} F_3 \nu_3\, dA + \int_{(M,\nu)} F_3 \nu_3\, dA$$

$$\int_{(D^+,\nu)} F_3 \nu_3\, dA = \int_A (F_3 \nu_3 \circ \phi^+)(x,y)\, \|(\phi^+)'(x,y)(e_1) \times (\phi^+)'(x,y)(e_2)\|_2\, d(x,y) =$$

$\int_A (F_3 \circ \phi^+)(x,y)\, d(x,y) =$

$\int_A F_3(x,y,\psi(x,y))\, d(x,y)$

Rechnung für $D^-$ analog

Das Integral über $M$ ist gleich null, weil $F_3 \nu_3$ konstant null ist. Insgesamt erhalten wir

$$\int_{(\partial B, \nu)} F_3 \nu_3 \, dA =$$

$$\int_A \left(F_3(x,y,\psi(x,y)) - F_3(x,y,\varphi(x,y))\right) d(x,y) \qquad \square$$

beseit…
funkt…
linke Sei…
$\int_B \partial_3$…
$= \int_A$…
rechte…
$\int_{(\partial\ldots}$
$\int_{(D^+,\nu}$…

## Rotation eines Vektorfeldes

### Definition (5.32)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $F : U \to \mathbb{R}^3$ auf $U$ ist definiert durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(F)(p) &= (\nabla \times F)(p) = \left( \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \right)(p) \\
&= \begin{pmatrix} \partial_2 F_3(p) - \partial_3 F_2(p) \\ \partial_3 F_1(p) - \partial_1 F_3(p) \\ \partial_1 F_2(p) - \partial_2 F_1(p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

## Stokes'scher Integralsatz

**Satz (5.33)**

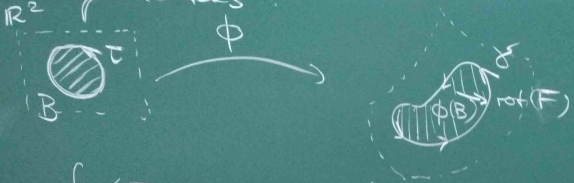
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Teilmenge mit positiv orientierter Randkurve $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ derart, dass der Gauß'sche Integralsatz der Ebene für Vektorfelder auf $B$ gültig ist. Sei außerdem $\phi : B \to \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche mit einer $\mathscr{C}^2$-Parametrisierungsabbildung und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ die Raumkurve gegeben durch $\gamma = \phi \circ \tau$. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen mit $U \supseteq \phi(B)$ un d $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_\gamma \langle F, ds \rangle \quad = \quad \int_{(B,\phi)} \langle \mathrm{rot}(F), dA \rangle .$$

Sämtliche Integralsätze bleiben gültig, wenn die Begrenzungsfunktionen $\varphi$ und $\psi$ der Normalbereiche nur im Inneren des Intervalls $[a, b]$ bzw. der kompakten Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, und auf dem Rand jeweils stetig sind.

Beweis von Satz 5.34.

geometrische Interpretation des Stokes'schen Integralsatzes:




$$\int_\gamma \langle F, \gamma \rangle \, ds = \int_{(B,\phi)} \langle rot(F), dA \rangle$$

## Interpretation der ebenen Divergenz

**Satz (5.34)**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $p \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $K_r \subseteq \mathbb{R}^2$ der Vollkreis vom Radius $r$ um $p$, $\nu : \partial K_r \to \mathbb{R}^2$ sein äußeres Einheitsnormalenfeld, und es sei $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \partial K_r$ die positiv orientierte Randkurve gegeben durch $\gamma_r(t) = p + (r\cos(t), r\sin(t))$. Dann gilt

$$\operatorname{div}(F)(p) \quad = \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F, \nu \rangle \, ds.$$

Beweis von Satz 5.34.

$$\operatorname{div}(F)(p) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F, \nu \rangle \, ds$$

Sei $r \in \mathbb{R}^+$ mit $K_r \subseteq U$. Setze

$m_-(r)$ = Minimum von $\operatorname{div}(F)$ auf $K_r$

$m_+(r)$ = Maximum " " auf $K_r$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\Rightarrow m_-(r)\, v_2(K_r) \leq \int_{K_r} \operatorname{div}(F)(x,y)\, d(x,y) \leq$$

$$m_+(r)\, v_2(K_r) \xRightarrow[\text{Integralsatz}]{\text{Gaußscher}} m_-(r) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\gamma_r} \langle F, \nu_r \rangle \, ds \leq m_+(r)$$

$\square$

Bilde nun den Limes $r \to 0$.

## Interpretation der räumlichen Divergenz

### Satz (5.35)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $p \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $K_r \subseteq \mathbb{R}^3$ die Kugel vom Radius $r$ um $p$ und $\nu : \partial K_r \to \mathbb{R}^3$ das zugehörige Einheitsnormalenfeld. Dann gilt

$$\mathrm{div}(F)(p) \quad = \quad \lim_{r \to 0} \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\right)^{-1} \int_{(\partial K_r, \nu)} \langle F, \nu \rangle \, dA.$$

## Interpretation der Rotation

### Satz (5.36)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Sei $p \in U$, und seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ zwei zueinander orthognale Vektoren der Länge 1. Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\gamma_r : [0, 2] \to \mathbb{R}^3$ die Kreislinie definiert durch

$$\gamma_r(t) = p + r\cos(t)v + r\sin(t)w,$$

und es sei $n = v \times w$. Dann gilt

$$\langle \mathrm{rot}(F), n \rangle \quad = \quad \lim_{r \to 0} \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} \langle F, ds \rangle.$$