Definition der parametrisierten Flächen

Definition (5.11)

Eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche ist ein Paar (A, ϕ) bestehend aus einer kompakten, zusammenhängenden, Jordan-messbaren Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und einer injektiven $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\phi : A \to \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\mathrm{rg}\,\phi'(p) = 2$ für alle $p \in A$ gilt.

Definition der Parametertransformationen

Definition (5.12)

Seien (A, ϕ) und (B, ψ) zwei parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Flächen mit derselben Spur. Eine Parametertransformation zwischen (A, ϕ) und (B, ϕ) ist ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus $\rho : A \to B$ mit $\psi \circ \rho = \phi$. Gilt $\det \rho'(p) > 0$ für alle $p \in A$, dann nennt man ρ orientierungserhaltend. Ansonsten gilt $\det \rho'(p) < 0$ für alle $p \in A$, und man bezeichnet ρ als orientierungsumkehrend.

Satz (5.13)

Für eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) Die Teilmenge S ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Für jeden Punkt $q \in S$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche (A, ϕ) mit $\phi(A^\circ) = S \cap U$.

Existenz von Parametertransformationen

Satz (5.14)

Zwischen zwei parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Flächen mit derselben Spur existiert entweder eine orientierungserhaltende oder eine orientierungsumkehrende Parametertransformation.

Definition der Flächenintegrale

Definition (5.15)

Sei (B, ϕ) eine parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche mit kompaktem Definitionsbereich B, $f : \phi(B) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \phi(B) \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf B. Dann wird das Integral

$$\int_{(B,\phi)} f \, dA \quad = \quad \int_B (f \circ \phi)(x, y) \, \|\phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2)\| \, d(x, y)$$

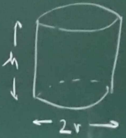
ein Flächenintegral 1. Art und das Integral

$$\int_{(B,\phi)} \langle F, dA \rangle \quad = \quad \int_B \langle (F \circ \phi)(x, y) \, , \, \phi'(x, y)(e_1) \times \phi'(x, y)(e_2) \rangle \, d(x, y)$$

ein Flächenintegral 2. Art genannt. Insbesondere bezeichnet man $v_2((B, \phi)) = \int_{(B,\phi)} 1 \, dA$ als Inhalt der parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Fläche.

Beispiel 1. Zylinderoberfläche

Betrachte einen Zylinder mit Höhe h und Deckelradius r.



Gesucht ist der Flächeninhalt des Mantels

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le r^2\}$$

wird parametrisiert durch

$$\Phi : [0,h] \times [0,2\pi] \to M,$$

$$(z,\varphi) \mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)$$

... durch

$$v_2(M) = \int_{[0,h]\times[0,2\pi]} \| \phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2) \| \, d(z,\varphi)$$

$$\phi'(z,\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & -r\sin(\varphi) \\ 0 & r\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \| \phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2) \|^2$$

$$= (-r\cos(\varphi))^2 + (-r\sin(\varphi))^2 = r^2$$

$\Rightarrow \|$

$= r$

$= 2$

Beispi

Kamp

zeige

Sei h d

ist das K

$x^2+y^2 \leq r^2$

h

...ach

$...-r)^2 + h^2$

h und

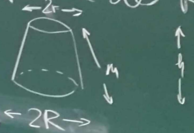
$(R+r)\pi m$

$\Rightarrow \|\phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2)\|$

$= r \Rightarrow v_2(M) = \int_{[0,h]\times[0,2\pi]} r \, d(z,\varphi)$

$= 2\pi r h$

Beispiel 2. Mantelfläche des Kegelstumpfs



zeige: Flächeninhalt des Mantels ist $(R+r)\pi m$

Sei h die Höhe des Kegelstumpfs. Dann ist der Kegelstumpf selbst geg. durch

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le r(z)^2\}$$

wobei $r(z) = R - sz$ mit $s = \frac{R-r}{h}$

(Überprüfung: $r(h) = R - sh = R - \frac{R-r}{h} h$
$= R - (R-r) = r$)

Mantelfläche $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 = r(z)^2\}$

Parametrisierung: $\phi : [0,h] \times [0,2\pi] \to M$,

$(z,\varphi) \mapsto (r(z)\cos(\varphi), r(z)\sin(\varphi), z)$

$$\phi'(z,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(z)\cos(\varphi) & -r(z)\sin(\varphi) \\ r'(z)\sin(\varphi) & r(z)\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -s\cos(\varphi) & -r(z)\sin(\varphi) \\ -s\sin(\varphi) & r(z)\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2) = \begin{pmatrix} -s\cos(\varphi) \\ -s\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r(z)\sin(\varphi) \\ r(z)\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -r(z)\cos(\varphi) \\ -r(z)\sin(\varphi) \\ -s\,r(z) \end{pmatrix} = r(z) \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ -s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\phi'(z,\varphi)(e_1) \times \phi'(z,\varphi)(e_2)\| = r(z)\sqrt{1+s^2}$$

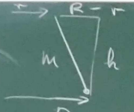
$$\Rightarrow v_2(M) = \int_{[0,h]\times[0,2\pi]} r(z)\sqrt{1+s^2}\, d(z,\varphi) = 2\pi\sqrt{1+s^2}\int_0^h r(z)\,dz$$

$$= 2\pi\sqrt{1+s^2}\int (R - sz)\,dz = 2\pi\sqrt{1+s^2}\left[Rz - \frac{1}{2}sz^2\right]_0^h$$

$$\phi'(z,\varphi) = \begin{pmatrix} r'(z)\cos(\varphi) & -r(z)\sin(\varphi) \\ r'(z)\sin(\varphi) & r(z)\cos(\varphi) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wird parametrisiert durch

$$2\pi\sqrt{1+s^2}\left(Rh - \frac{1}{2}s h^2\right)$$



Die Länge der Mantellinie ist nach Pythagoras geg. durch $m = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$

$$\Rightarrow h = \sqrt{m^2 - (R-r)^2}$$

Setzt man die Ausdrücke für h und s ein, so erhält man $v_2(M) = (R+r)\pi m$

Hier kommt noch die Rechnung, die zeigt, dass tatsächlich die Formel $v_2(M) = (R + r)\pi m$ für die Mantelfläche herauskommt: Wir haben bereits gezeigt, dass

$$v_2(M) = 2\pi\sqrt{1+s^2}(Rh - \tfrac{1}{2}sh^2)\ ,\ s = \frac{R-r}{h} \text{ und } h = \sqrt{m^2 - (R-r)^2}$$

gilt. Nun ist

$$\sqrt{1+s^2} \quad = \quad \sqrt{1 + \frac{(R-r)^2}{m^2-(R-r)^2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{m^2}{m^2-(R-r)^2}}$$

und

$$\begin{aligned} Rh - \tfrac{1}{2}sh^2 \quad &= \quad h(R - \tfrac{1}{2}sh) \quad = \quad h\left(R - \tfrac{1}{2}\frac{R-r}{h}h\right) \quad = \\ h(R - \tfrac{1}{2}(R-r)) \quad &= \quad \tfrac{1}{2}h(R+r) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-(R-r)^2}(R+r). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also

$$v_2(M) \quad = \quad 2\pi \cdot \sqrt{1+s^2} \cdot (Rh - \tfrac{1}{2}sh^2)$$

$$= \quad 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{m^2-(R-r)^2}} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{m^2-(R-r)^2}(R+r)$$

$$= \quad 2\pi \cdot \sqrt{m^2} \cdot \tfrac{1}{2}(R+r) \quad = \quad (R+r)\pi m.$$

Definition des Kreuzprodukts

Definition (5.16)

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Proposition (5.17)

Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, $T \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$,
$(\lambda v) \times w = v \times (\lambda w) = \lambda(v \times w)$, $w \times v = -v \times w$

(ii) $\langle v, v \times w \rangle = \langle w, v \times w \rangle = 0$

(iii) $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w)$

(iv) $v \times w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \{v, w\}$ ist linear abhängig

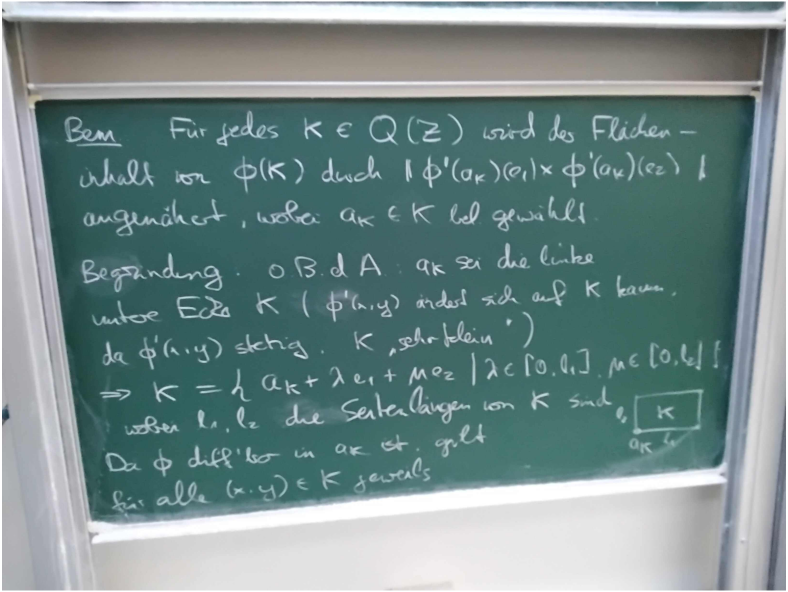
Dabei bezeichnet $\det(u, v, w)$ die Determinante der 3×3-Matrix mit u, v, w als Spaltenvektoren. Man bezeichnet die Zahl unter (iii) auch als Spatprodukt der Vektoren u, v und w.

Zur geometrischen Interpretation der Flächenintegrale

Proposition (5.18)

Sei (Q, ϕ) eine parametrisierte $\mathscr{C}^1$-Fläche mit einem kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ als Definitionsbereich, und sei $f : \phi(Q) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathscr{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Feinheit $\delta(\mathscr{Z}) < \delta$, $a_K \in K$ für jedes $K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})$ ein beliebig gewählter Punkt und $p_K = \phi(a_K)$, dann gilt jeweils

$$\left| \sum_{K \in \mathscr{Q}(\mathscr{Z})} f(p_K) \|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\| v_2(K) \; - \; \int_{(Q,\phi)} f \, dA \right| \; < \; \varepsilon.$$



Korrektur: In der zweiten Zeile muss die Vektorlänge $\|\phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2)\|_2$ noch mit $v_2(K)$ multipliziert werden.

für alle $(x,y) \in K$ jeweils

$\phi(x,y) \approx \phi_K(x,y)$, wobei $\phi_K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y) \mapsto \phi(a_K) + \phi'(a_K)((x,y) - a_K)$

$\Rightarrow \phi_K(K) = \{ \phi(a_K) + \lambda \phi'(a_K)(e_1) + \mu \phi'(a_K)(e_2)$

$\lambda \in [0, l_1] \quad \mu \in [0, l_2] \}$

Dies ist ein Parallelogramm im $\mathbb{R}^3$, das aufgespannt wird von $\phi'(a_K)(l_1 e_1)$, $\phi'(a_K)(l_2 e_2)$

Flächeninhalt des Parallelogramms ist

$\| \phi'(a_K)(l_1 e_1) \times \phi'(a_K)(l_2 e_2) \| = l_1 l_2 \| \phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2) \|$

$= \| \phi'(a_K)(e_1) \times \phi'(a_K)(e_2) \| \, v(K)$ Wegen $\phi \approx \phi_K$ bei a_K ist dies auch näherungsweise der Flächeninh. von $\phi(K)$

Invarianz der Integrale unter Parametertransformationen

Proposition (5.19)

Seien (A, ϕ) und (B, ψ) parameterisierte $\mathscr{C}^1$-Flächen mit kompakten Definitionsbereichen A und B.

(i) Existiert zwischen den beiden parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Flächen eine Parametertransformation, dann stimmen für jede stetige, reellwertigen Funktionen f auf $\phi(A) = \phi(B)$ die entsprechenden Flächenintegrale 1. Art überein.

(ii) Existiert zwischen den beiden parametrisierten $\mathscr{C}^1$-Flächen eine orientierungserhaltende Parametertransformation, dann stimmen für jedes stetige Vektorfeld F auf $\phi(A) = \phi(B)$ die entsprechenden Flächenintegrale 2. Art überein.

Beweis von Prop. (5.19): (für Flächenint 2 Art)

(A,ϕ), (B,ψ) Parametrisierungen

N.V. existiert ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus ρ von einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ auf sein Bild $\rho(G)$, wobei $G \supseteq A$ und $\phi = \psi \circ \rho$.

Sei F ein stetiges Vektorfeld auf $\phi(A) = \psi(B)$

Nach Def. gilt $\int_{(A,\phi)} \langle F, dA \rangle =$

$$\int_A \langle (F \circ \phi)(x,y), \phi'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2) \rangle \, d(x,y)$$

… und $\phi = \psi \circ \rho$.

Sei F ein stetiges Vektorfeld auf $\phi(A) = \psi(B)$

Kettenregel $\Rightarrow \phi'(x,y) = (\psi \circ \rho)'(x,y) =$
$\psi'(\rho(x,y)) \circ \rho'(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$

Sei $(x,y) \in A$ und $\rho'(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

ρ orientierungserh. $\Rightarrow ad - bc = \det \rho'(x,y) > 0$

$\Rightarrow \phi'(x,y)(e_1) \times \phi'(x,y)(e_2) =$
$\psi'(\rho(x,y))\big(\rho'(x,y)(e_1)\big) \times \psi'(\rho(x,y))\big(\rho'(x,y)(e_2)\big)$
$= \psi'(\rho(x,y))(a e_1 + c e_2) \times \psi'(\rho(x,y))(b e_1 + d e_2)$
$= ab\, \cancel{\psi'(\rho(x,y))(e_1) \times \psi'(\rho(x,y))(e_1)}$
$+ ad\, \psi'(\rho(x,y))(e_1) \times \psi'(\rho(x,y))(e_2)$

$$+\ bc\,\psi'(\rho(x,y))(e_2)\times\psi'(\rho(x,y))(e_1)$$

$$\cancel{+\ cd\,\psi'(\rho(x,y))(e_2)\times\psi'(\rho(x,y))(e_2)}$$

$$= (ad-bc)\,\psi'(\rho(x,y))(e_1)\times\psi'(\rho(x,y))(e_2)$$

einsetzen $\Longrightarrow$

$$\int_{(A,\varphi)} \langle F, dA\rangle = \int_A \langle (F\circ\psi\circ\rho)(x,y),\ \psi'(\rho(x,y))(e_1)\times\psi'(\rho(x,y))(e_2)\rangle\ |\det\rho'(x,y)|\ d(x,y) \overset{\text{Transf-satz}}{=}$$

$$\int_{\rho(A)} \langle (F\circ\psi)(x,y),\ \psi'(x,y)(e_1)\times\psi'(x,y)(e_2)\rangle\ d(x,y) = \int_{(B,\psi)} \langle F, dA\rangle \quad \square$$

Orientierte stückweise $\mathscr{C}^1$-Flächen

Definition (5.20)

Ein stetiges Einheitsvektorfeld auf einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine stetige Abbildung $\nu : S \to \mathbb{R}^3$ mit $\|\nu(p)\| = 1$ für alle $p \in S$. Sei nun (S, ν) ein Paar bestehend aus einer Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^3$ und einem stetigen Einheitsvektorfeld ν auf S. Eine Parametrisierung von (S, ν) als stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche ist eine endliche Familie $((A_i, \phi_i))_{i \in I}$ parametrisierter $\mathscr{C}^1$-Flächen mit folgenden Eigenschaften:

(i) Die Definitionsbereiche $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$ sind kompakt.

(ii) Es gilt $S = \bigcup_{i \in I} \phi_i(A_i)$.

(iii) Für jedes $i \in I$ existiert eine Jordansche Nullmenge $N_i \subseteq A_i$, so dass für alle $p \in A_i \setminus N_i$ jeweils $\phi_i'(p)(e_1) \times \phi_i'(p)(e_2)$ ein positives skalares Vielfaches von $\nu(\phi_i(p))$ ist.

(iv) Für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt $\phi_i(A_i \setminus N_i) \cap \phi_j(A_j \setminus N_j) = \varnothing$.

Ein Paar (S, ν) nennen wir eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, wenn das Paar eine entsprechende Parametrisierung besitzt. Wir bezeichnen ν dann auch als stetiges Einheitsnormalenfeld auf S.

Integrale über orientierte stückweise $\mathscr{C}^1$-Flächen

Definition (5.21)

Sei (S,ν) eine orientierte kompakte stückweise $\mathscr{C}^1$-Fläche, $((A_i,\phi_i))_{i\in I}$ eine Parametrisierung, $f : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld. Dann ist das Flächenintegral 1. Art von f bzw. das Flächenintegral 2. Art von F definiert durch

$$\int_{(S,\nu)} f\,dA = \sum_{i\in I} \int_{(A_i,\phi_i)} f\,dA$$

bzw.

$$\int_{(S,\nu)} \langle F, dA\rangle = \sum_{i\in I} \int_{(A_i,\phi_i)} \langle F, dA\rangle.$$