§ 5. Wegintegrale und Flächenintegrale, Integralsätze

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge.

- Wir bezeichnen eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}^m$ als stetig differenzierbar, wenn eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine $\mathscr{C}^1$-Abbildung $\hat{f} : U \to \mathbb{R}^m$ mit $\hat{f}|_A = f$ existieren.

- Ein Weg in A ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \to A$, wobei γ ein (endliches oder unendliches) Intervall bezeichnet.

- Wir bezeichnen γ als stückweise stetig differenzierbar, wenn Punkte $t_1 < ... < t_r$ in I existieren, so dass $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ für $2 \leq k \leq r$ jeweils stetig differenzierbar ist, ebenso $\gamma|_{I^-}$ und $\gamma|_{I^+}$ für $I^- = \{t \in I \mid t \leq t_1\}$ und $I^+ = \{t \in I \mid t \geq t_r\}$.

Beispiele für stückweise stetig diff'bare Wege

- der Kreis $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$
- das Quadrat $\gamma_2 : [0, 4] \to \mathbb{R}^2$,
$$t \mapsto \begin{cases} (t, 0) & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{für } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & \text{für } 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & \text{für } 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$
- die Schraubenlinie (Helix) $\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$
- die logarithmische Spirale $\gamma_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$t \mapsto (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$

Rechenoperationen auf Wegen

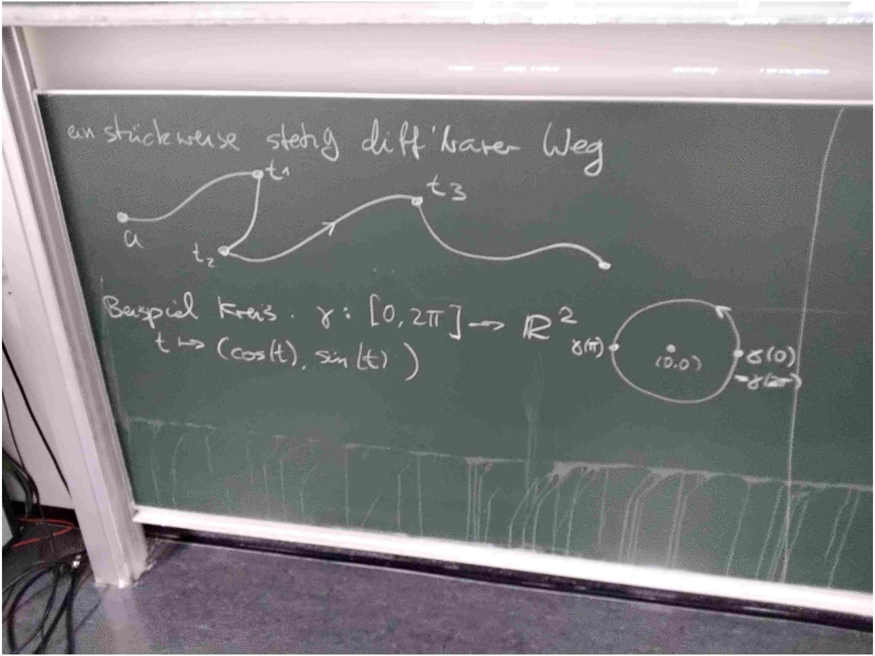
Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$, dann wird $[0,1] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (1-t)p + tq$ die Verbindungsstrecke zwischen p und q genannt und mit $[p,q]$ bezeichnet.

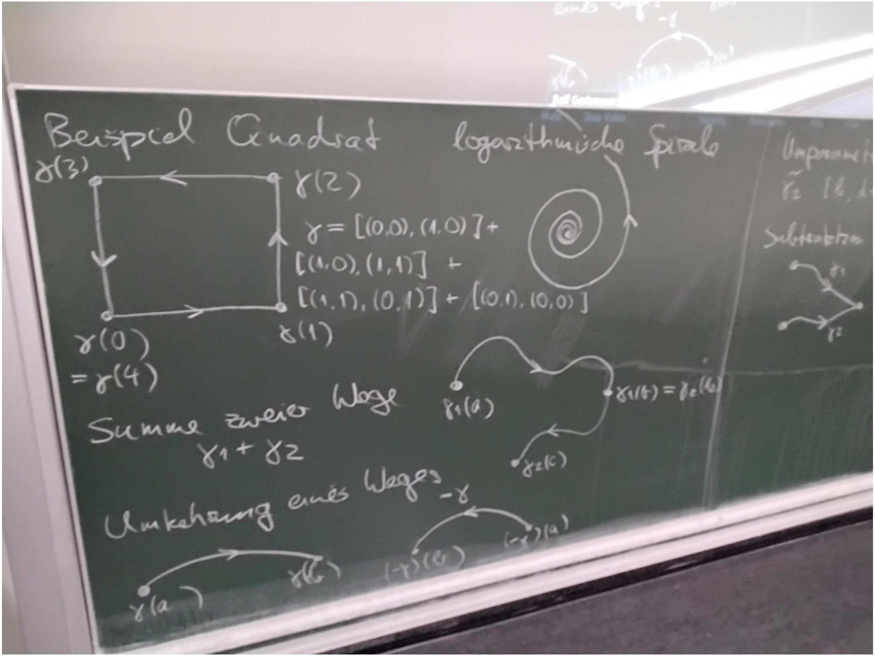
Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, und seien $\gamma_1 : [a,b] \to U$, $\gamma_2 : [b,c] \to U$ Wege in U.

(i) Der Weg $\gamma_1 + \gamma_2$ gegeben durch $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[a,b]} = \gamma_1$ und $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[b,c]} = \gamma_2$ wird die Summe von γ_1 und γ_2 genannt.

(ii) Den Weg $-\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(-\gamma_1)(t) = \gamma_1(b + a - t)$ nennt man die Umkehrung von γ_1.


ein stückweise stetig diff'barer Weg
t_1
t_3
a
t_2
Beispiel Kreis. $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$
$t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$
$\gamma(\pi)$
$(0,0)$
$\gamma(0)$
$= \gamma(2\pi)$


Beispiel Quadrat
$\gamma(3)$
$\gamma(2)$
$\gamma = [(0,0),(1,0)] + [(1,0),(1,1)] + [(1,1),(0,1)] + [(0,1),(0,0)]$
$\gamma(0) = \gamma(4)$
$\gamma(1)$
logarithmische Spirale
Summe zweier Wege
$\gamma_1 + \gamma_2$
$\gamma_1(a)$
$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$
$\gamma_2(c)$
Umkehrung eines Weges $-\gamma$
$\gamma(a)$
$\gamma(b)$
$(-\gamma)(b)$
$(-\gamma)(a)$
Subtraktion
γ_1
γ_2

Rechenoperationen auf Wegen (Forts.)

(i) Ist $\gamma_2 : [c, d] \to U$ ein Weg mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, aber mit $c \neq b$, dann definiert man $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_1 + \tilde{\gamma}_2$, wobei $\tilde{\gamma}_2 : [b, d - c + b] \to \mathbb{R}^n$ durch die Umparametrisierung $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t + c - b)$ gegeben ist.

(ii) Sind $\gamma_1 : [a, b] \to U$ und $\gamma_2 : [c, d] \to U$ Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, dann definiert man $\gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_1 + (-\gamma_2)$.

(iii) Man bezeichnet einen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ als geschlossen, wenn sein Anfangs- und sein Endpunkt übereinstimmen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt.

Weglängen und Wegintegrale

Definition (5.1)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge, $\gamma : [a, b] \to U$ ein stückweise stetig diff'barer Weg in U und $f : U \to \mathbb{R}$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Dann bezeichnet man

(i) die Zahl $\ell(\gamma) = \int_\gamma 1 \; ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \; dt$ als Weglänge

(ii) den Wert $\int_\gamma f \; ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| \, dt$ als Wegintegral 1. Art

(iii) den Wert $\int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle \; dt$ als Wegintegral 2. Art.

Eine Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ wie in der Definition wird auch ein stetiges Vektorfeld genannt.

Bsp. Länge (= Umfang) des Kreises

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$ $\quad \|\gamma'(t)\|^2 = \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle =$

$(-\sin(t))^2 + \cos(t)^2 = 1 \Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt$

$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi$

Bsp. $p, q \in \mathbb{R}^n$, $\gamma = [p, q]$, d.h. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$,

$t \mapsto (1-t)p + tq = \begin{pmatrix} (1-t)p_1 + tq_1 \\ \vdots \\ (1-t)p_n + tq_n \end{pmatrix} \Rightarrow \gamma'(t) = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = q - p$

$\Rightarrow \ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_2\, dt = \int_0^1 \|q-p\|_2\, dt = \|q-p\|_2$

$\langle F, ds\rangle \quad \int_b^{d+c-b} f(\gamma_2(\tau(t)))\, \|(\gamma_2 \circ \tau)'(t)\|\, dt =$

$\int_{\gamma_1} \langle F, ds\rangle \quad \int_b^{d+c-b} (f((\gamma_2 \circ \tau)(t))\, \|\gamma_2'(\tau(t))\|\, \tau'(t)\, dt =$

Die Länge der logarithmischen Spirale

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass sich der innere Teil der logarithmischen Spirale unendlich oft um den Koordinatenursprung herumwickelt, dabei aber eine endliche Gesamtlänge hat. Das rechnen wir nach. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\gamma(t) \;=\; (e^t \cos(t), e^t \sin(t)).$$

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ entspricht $\gamma_n = \gamma|_{[2n\pi, 2(n+1)\pi]}$ einem Umlauf der Spirale. Wir berechnen die Länge dieses Umlaufs in Abhängigkeit von n. Es gilt jeweils

$$\gamma'(t) \;=\; (e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t))).$$

Damit erhalten wir

$$\|\gamma'(t)\|_2^2 \;=\; e^{2t} \left\langle \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle \;=$$

Die Länge der logarithmischen Spirale (Forts.)

$$e^{2t}\left((\cos(t)-\sin(t))^2+(\sin(t)+\cos(t))^2\right) \;=$$
$$e^{2t}(\cos(t)^2-2\sin(t)\cos(t)+\sin(t)^2+\sin(t)^2+2\sin(t)\cos(t)+\cos(t)^2)$$
$$=\; 2e^{2t}(\cos(t)^2+\sin(t)^2) \;=\; 2e^{2t}.$$

Damit erhalten wir für alle $n \in \mathbb{Z}$ jeweils

$$\ell(\gamma_n) \;=\; \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \|\gamma_n'(t)\|_2\,dt \;=\; \sqrt{2}\cdot\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^t\,dt$$
$$=\; \sqrt{2}\left[e^t\right]_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \;=\; \sqrt{2}\left(e^{2(n+1)\pi}-e^{2n\pi}\right).$$

Für die Länge des inneren Teils erhalten wir also den Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(\gamma_{-n}) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\left(e^{2((-n)+1)\pi}-e^{2(-n)\pi}\right) \;=$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\left(e^{2(1-n)\pi}-e^{-2n\pi}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{2}\left(e^{-2n\pi}-e^{-2(n+1)\pi}\right) \;=$$
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\left(1-e^{-2(n+1)\pi}\right) \;=\; \sqrt{2}.$$

Geometrische Interperation der Wegintegrale 1. Art

Satz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \to U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$ und ist $u_k \in \,]t_{k-1}, t_k[$ für $1 \leq k \leq m$, dann folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{m} (f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \int_\gamma f\, ds \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Geometrische Interperation der Weglänge

Wendet man den Satz auf die konstante Funktion mit dem Wert 1 an, so erhält man folgende Ausssage über die Approximation von Kurvenlängen durch Polygonzuglängen.

Satz

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbarer Weg in U. Dann gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathscr{Z} = \{t_1, ..., t_{m-1}\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Feinheit $< \delta$, dann folgt

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \ell(\gamma) \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Beweis des Satzes

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Weil die Funktion $\tilde{f} : [a, b]^{n+1} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(s_0, s_1, ..., s_n) \mapsto (f \circ \gamma)(s_0) \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(s_j)^2}$$

auf ihrem kompakten Definitionsbereich gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $s, s' \in [a, b]^{n+1}$ mit $\|s - s'\|_\infty < \delta$ jeweils $|\tilde{f}(s) - \tilde{f}(s')| < \frac{\varepsilon}{2\kappa(b-a)}$ erfüllt ist.

Sei nun $k \in \{1, ..., m\}$. Wenden wir den (eindimensionalen) Mittelwertsatz auf die einzelnen Komponenten γ_j von γ an, so erhalten wir jeweils ein $s_j \in \,]t_{k-1}, t_k[$ mit

$$\gamma_j'(s_j)(t_k - t_{k-1}) = \gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}).$$

Beweis des Satzes (Forts.)

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2^2 \; &= \; \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}))^2 \\ &= \; (t_k - t_{k-1})^2 \sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(s_j)^2, \end{aligned}$$

also $(f \circ \gamma)(u_k)\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 = \tilde{f}(u_k, s_1, ..., s_n)(t_k - t_{k-1})$, und wegen $\|(u_k, s_1, ..., s_n) - (u_k, ..., u_k)\|_\infty \leq (t_k - t_{k-1}) < \delta$ schließlich

$$\begin{aligned} &|(f \circ \gamma)(u_k)\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - (f \circ \gamma)(u_k)\|\gamma'(u_k)\|_2(t_k - t_{k-1})| \\ = \; &(t_k - t_{k-1})|\tilde{f}(u_k, s_1, ..., s_n) - \tilde{f}(u_k, u_k, ..., u_k)| \; < \; (t_k - t_{k-1})\frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes (Forts.)

Summation über alle k ergibt, dass der Abstand $|s - s'|$ zwischen

$$s = \sum_{k=1}^{m} |(f \circ \gamma)(u_k)| \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2$$

und

$$s' = \sum_{k=1}^{m} (f \circ \gamma)(u_k) \|\gamma'(u_k)\|_2 (t_k - t_{k-1})$$

durch

$$\sum_{k=1}^{m} (t_k - t_{k-1}) \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \tfrac{1}{2}\varepsilon$$

nach oben abgeschätzt werden kann.

Beweis des Satzes (Forts.)

Nun ist s' aber eine Riemannsche Summe der Funktion $t \mapsto (f \circ \gamma)(t)\|\gamma'(t)\|_2$ bezüglich der Zerlegung $\mathscr{Z}$. Nach weiterer Verkleinerung von δ erfüllt diese die Abschätzung

$$\left|s' - \int_\gamma f\, ds\right| \;=\; \left|s' - \int_a^b (f \circ \gamma)(t)\|\gamma'(t)\|_2\, dt\right| \;<\; \tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Insgesamt gilt damit tatsächlich

$$\left|\sum_{k=1}^{m} |(f \circ \gamma)(u_k)\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 - \int_\gamma f\, ds\right| \;<\; \varepsilon.$$

Korrekturanmerkung

Der in der Vorlesung angegebene Beweis für die Kurvenlänge war leider fehlerhaft. Es muss der eindimensionale Mittelwertsatz auf die einzelnen Komponenten von γ angewendet werden, nicht der Mittelwertsatz für Richtungsableitungen auf γ. Letzterer eignet sich für reellwertige Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich, aber nicht für vektorwertige Funktionen.

Rechenregeln für Wegintegrale

Proposition

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, seien $f, g : U \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $F, G : U \to \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Außerdem seien γ_1, γ_2 stückweise stetig diff'bare Wege in U derart, dass $\gamma_1 + \gamma_2$ definiert ist. Dann gilt

(i) $\int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g)\, ds = \lambda \int_{\gamma_1} f\, ds + \mu \int_{\gamma_1} g\, ds$,
$\int_{\gamma_1} \langle \lambda F + \mu G, ds \rangle = \lambda \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \mu \int_{\gamma_1} \langle G, ds \rangle$

(ii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds + \int_{\gamma_2} f\, ds$,
$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \langle F, ds \rangle = \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle + \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle$

(iii) $\int_{-\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_1} f\, ds$, $\int_{-\gamma_1} \langle F, ds \rangle = -\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle$.

Beweis der Rechenregeln

zu (i) Diese beiden Gleichungen erhält man durch einfaches Einsetzen der Definitionen und Nachrechnen. Für einen vorgegebenen Weg $\gamma_1 : [a, b] \to U$ erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} (\lambda f + \mu g)\, ds \;=\; \int_a^b (\lambda f + \mu g)(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt \;=$$

$$\lambda \int_a^b f(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt + \mu \int_a^b g(\gamma_1(t)) \|\gamma_1'(t)\|_2 \, dt \;=$$

$$\lambda \int_{\gamma_1} f \, ds + \mu \int_{\gamma_1} g \, ds.$$

Eine ähnliche Rechnung ergibt dieselbe Regel für die Wegintegrale 2. Art.

Beweis der Rechenregeln (Forts.)

zu (ii) Auch hier können wir uns beim Beweis auf Wegintegrale 1. Art beschränken. Sei $\gamma_2 : [c, d] \to U$ wie angegeben. Zunächst betrachten wir den Fall $b = c$. Nach Definition der Summe zweier Wege gilt $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[a,b]} = \gamma_1$ und $(\gamma_1 + \gamma_2)|_{[b,d]} = \gamma_2$. Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f\,ds = \int_a^d (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t) \|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2\,dt =$$

$$\int_a^b (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t)\|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2\,dt + \int_b^d (f \circ (\gamma_1 + \gamma_2))(t)\|(\gamma_1 + \gamma_2)'(t)\|_2\,dt$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma_1)(t)\|\gamma_1'(t)\|_2\,dt + \int_b^d (f \circ \gamma_2)(t)\|\gamma_2'(t)\|_2\,dt$$

$$= \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds.$$

Beweis der Rechenregeln (Forts.)

Für den allgemeinen Fall müssen wir noch überprüfen, dass sich die Wegintegrale bei Umparametrisierung nicht ändern. Auch hier beschränken wir uns auf Wegintegrale 1. Art. Sei $r \in \mathbb{R}$ und $\tilde{\gamma}_2 : [c+r, d+r] \to U$ gegeben durch $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(t-r)$. Dann ist $\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2 \circ \tau$ mit der Funktion $\tau(t) = t - r$ und der Ableitung $\tau'(t) = 1$. Die eindimensionale Kettenregel liefert

$$\int_{\tilde{\gamma}_2} f\,ds \;=\; \int_{c+r}^{d+r} (f \circ \tilde{\gamma}_2)(t)\|\tilde{\gamma}_2'(t)\|\,dt \;=$$

$$\int_{c+r}^{d+r} (f \circ \gamma_2 \circ \tau)(t)\|(\gamma_2 \circ \tau)'(t)\|\,dt \;=\; \int_{c+r}^{d+r} (f \circ \gamma_2 \circ \tau)(t)\|\gamma_2'(\tau(t))\|\tau'(t)\,dt$$

$$= \int_{\tau(c+r)}^{\tau(d+r)} (f \circ \gamma_2)(t)\|\gamma_2'(t)\|\,dt \;=\; \int_c^d (f \circ \gamma_2)(t)\|\gamma_2'(t)\|\,dt \;=\; \int_{\gamma_2} f\,ds.$$

Beweis der Rechenregeln (Forts.)

zu (iii) Nach Definition gilt $(-\gamma_1)(t) = (\gamma_1 \circ \iota)(t)$ mit der Substitutionsfunktion $\iota(t) = a + b - t$, deren Ableitung den konstanten Wert -1 hat. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\gamma_1} f\,ds \;&=\; \int_a^b (f \circ (-\gamma_1))(t)\|(-\gamma_1)'(t)\|_2\,dt \;= \\
&\int_a^b (f \circ \gamma_1 \circ \iota)(t)\|(\gamma_1 \circ \iota)'(t)\|_2\,dt \;= \\
&-\int_a^b (f \circ \gamma_1 \circ \iota)(t)\|\gamma_1'(\iota(t))\|_2\,\iota'(t)\,dt \;= \\
-\int_{\iota(a)}^{\iota(b)} (f \circ \gamma_1)(t)\|\gamma_1'(t)\|_2\,dt \;&=\; -\int_b^a (f \circ \gamma_1)(t)\|\gamma_1'(t)\|_2\,dt \\
&=\; \int_a^b (f \circ \gamma_1)(t)\|\gamma_1'(t)\|_2\,dt \;=\; \int_{\gamma_1} f\,ds.
\end{aligned}$$

Beweis der Rechenregeln (Forts.)

zu (iii) Für die Wegintegrale 2. Art erhalten wir entsprechend

$$\int_{-\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle (F \circ (-\gamma_1))(t), (-\gamma_1)'(t) \rangle \, dt =$$

$$- \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), (\gamma_1 \circ \iota)'(t) \rangle \, \iota'(t) \, dt =$$

$$- \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), \iota'(t) \gamma_1'(\iota(t)) \rangle \, \iota'(t) \, dt =$$

$$\int_a^b \langle (F \circ \gamma_1 \circ \iota)(t), \gamma_1'(\iota(t)) \rangle \, \iota'(t) \, dt = \int_{\iota(a)}^{\iota(b)} \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt =$$

$$\int_b^a \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt = - \int_a^b \langle (F \circ \gamma_1)(t), \gamma_1'(t) \rangle \, dt = - \int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle.$$

Gradienten und konservative Vektorfelder

Definition

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $u : U \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann wird das Vektorfeld $\nabla u : U \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$(\nabla u)(p) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1 u(p) \\ \vdots \\ \partial_n u(p) \end{pmatrix}$$

der Gradient von u genannt. Ein Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt konservativ, wenn ein differenzierbare Funktion $u : U \to \mathbb{R}$ mit $F = \nabla u$ existiert.

Wegabhängigkeit

Im Allgemeinen sind Wegintegrale 2. Art zwischen zwei Punkten p und q abhängig vom Weg, der von p nach q gewählt wird. Ist beispielsweise $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y) \quad = \quad (x + y, y^2)$$

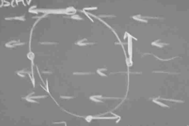
und sind die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ von $p = (0, 0)$ nach $q = (1, 1)$ gegeben durch $\gamma_1 = [p, q]$ und $\gamma_2 = [p, (1, 0)] + [(1, 0), q]$, dann erhält man

$$\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \tfrac{4}{3} \ , \ \int_{\gamma_2} \langle F, ds \rangle = \tfrac{5}{6}$$

Bei Wegintegralen 1. Art ist die Wegabhängigkeit offensichtlich.

Kurvenintegral 2. Art: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld, $\gamma: [a,b] \to U$ $\quad \int_\gamma \langle F, ds \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$

positiv



Integral „nahezu null"

Integral negativ

<u>Def 5.3</u> Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $u: U \to \mathbb{R}$ eine diff'bare Funktion. Dann wird das Vektorfeld $\nabla u: U \to \mathbb{R}^n$ geg. durch

$$\underbrace{(\nabla u)}_{\text{„nabla"}}(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 u(p) \\ \vdots \\ \partial_n u(p) \end{pmatrix}$$

der <u>Gradient</u> von u genannt.

Ein Vektorfeld $F: U \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>konservativ</u>, wenn $F = \nabla u$ für eine diff'bare Fkt u wie angeg. gilt.

Bem. Die totale Ableitung $u'(x)$ ist gleich $(\nabla u)(x)$ als Zeilenvektor geschrieben

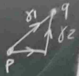
Bem: Sind $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $F: U \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge, dann ist $\int_\gamma \langle F, ds \rangle$ im Allg abhängig vom Weg γ, der von p nach q läuft

Bsp: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, y^2)$

$p = (0,0)$, $q = (1,1)$, $\gamma_1 = [p, q]$, $\gamma_2 = [p, (1,0)] + [(1,0), q]$

$\gamma_1(t) = (1-t)(0,0) + t(1,1)$
$= (t, t)$

$\gamma_1'(t) = (1,1)$



$$\int_{\gamma_1} \langle F, ds \rangle = \int_0^1 \left\langle F(t,t), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t^2 + 2t)\, dt = \left[\tfrac{1}{3} t^3 + t^2\right]_0^1 = \tfrac{4}{3}$$

Kriterium für die Wegunabhängigkeit

Satz

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, seien $p, q \in G$ und $F : U \to \mathbb{R}$ ein stetiges Vektorfeld. Das Wegintegral 2. Art $\int_\gamma \langle F, ds \rangle$ hat genau dann für jeden Weg γ in G von p nach q denselben Wert, wenn F konservativ ist.