

Eindeutigkeit von Inhaltsfunktionen

Satz

- (i) Es gibt genau eine Inhaltsfunktion auf $\mathcal{J}$, den Jordan-Inhalt.
- (ii) Für alle $A \in GL_n(\mathbb{R})$ und alle $B \in \mathcal{J}$ gilt
$$v(\phi_A(B)) = |\det(A)|v(B).$$

Beweis des Satzes, Teil (ii)

- Wir betrachten zunächst den Fall $A \in \mathcal{O}(n)$. Auf Grund des Lemmas ist $B \mapsto v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(B))$ eine Inhaltsfunktion. Nach Teil (i), der Eindeutigkeit des Jordan-Inhalts, folgt daraus

$$v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(B)) = v(B)$$

für alle $B \in \mathcal{J}$.

- Ist $\bar{B}_1$ die Einheitskugel vom Radius 1 um den Ursprung, dann gilt $\phi_A(\bar{B}_1) = \bar{B}_1$ wegen $A \in \mathcal{O}(n)$. Es folgt

$$v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\bar{B}_1) = v(\phi_A([0, 1]^n))^{-1}v(\phi_A(\bar{B}_1)) = v(\bar{B}_1)$$

und somit $v(\phi_A([0, 1]^n)) = 1 = |\det(A)|$. Dies wiederum bedeutet $v(\phi_A(B)) = |\det(A)|v(B)$, für alle $A \in \mathcal{O}(n)$ und alle $B \in \mathcal{J}$.

Beweis des Satzes, Teil (ii)

- Sei nun $D \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_k \in \mathbb{R}^+$, $1 \leq k \leq n$. Wie im ersten Fall erhalten wir

$$v(\phi_D([0, 1]^n))^{-1} v(\phi_D(B)) = v(B)$$

für alle $B \in \mathcal{J}$.

- Das Bild $\phi_D([0, 1]^n)$ des Einheitswürfels ist ein kompakter Quader Q mit Kantenlängen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und dem Volumen $v(Q) = \prod_{k=1}^n \lambda_k = \det(D)$. Es folgt $|\det(D)|^{-1} v(Q) = 1$, was zu $v(\phi_D([0, 1]^n)) = |\det(D)|$ umgeformt werden kann.
- Wir erhalten $v(\phi_D(B)) = |\det(D)| v(B)$ für alle $B \in \mathcal{J}$ und alle Diagonalmatrizen D mit positiven Einträgen.

Beweis des Satzes, Teil (ii)

- Ist nun $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ beliebig, dann existiert auf Grund der Polarzerlegung ein $U \in \mathcal{O}(n)$ und eine symmetrische positiv definite Matrix S mit $A = US$.
- Auf Grund des Spektralsatzes existiert ein $V \in \mathcal{O}(n)$ und eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen, so dass $S = {}^tVDV$ gilt. Insgesamt gilt also $A = WDV$, mit $W = U {}^tV \in \mathcal{O}(n)$. Auf Grund der bereits bewiesenen Gleichungen erhalten wir für jedes $B \in \mathcal{J}$ jeweils

$$\begin{aligned}v(\phi_A(B)) &= v(\phi_W(\phi_D(\phi_V(B)))) = \\|\det(W)|v(\phi_D(\phi_V(B))) &= |\det(W)||\det(D)|v(\phi_V(B)) = \\|\det(W)||\det(D)||\det(V)|v(B) &= |\det(A)|v(B).\end{aligned}$$

Verhalten des Riemann-Integrals bei gleichmäßiger Konvergenz

Lemma

Ist $T \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen $f_m : T \rightarrow \mathbb{R}$, die auf T **gleichmäßig** gegen eine weitere Riemann-integrierbare Funktion $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, dann folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T f_m(x) \, dx = \int_T f(x) \, dx.$$

Beweis: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in T$ und alle $m \geq M$. Für diese m folgt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_T f_m(x) \, dx - \int_T f(x) \, dx \right| &\leq \int_T |f_m(x) - f(x)| \, dx \\ &\leq \int_T \varepsilon \, dx = \varepsilon v(T). \end{aligned}$$

Def. $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktes Quader, $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, Z Zerlegung von Q . Für jedes $K \in Q(Z)$ ein $a_K \in K$ ein bel. gew. Punkt.

$$\text{Dann nennt man } R(f, (a_K)_{K \in Q(Z)}) = \sum_{K \in Q(Z)} f(a_K) \cdot v(K)$$

eine Riemannsche Summe von f bzgl. Z .

Bsp. $n=1$, $Q = [0,1]$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$

$$Z_m = \left\{ \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, \frac{m-1}{m} \right\} \quad Q(Z_m) = \left\{ \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m} \right] \mid 1 \leq k \leq m \right\}$$

Beispiele für Riemannsche Summen.

(1) Wähle $a_k = \frac{k-1}{m}$ für $1 \leq k \leq m$

$$\Rightarrow R(f, (a_k)_{1 \leq k \leq m}) = \sum_{k=1}^m \frac{k-1}{m} \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m (k-1) = \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{2} (m-1) m$$
$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = S_f^-(z)$$

(2) Wähle $a_k = \frac{k}{m}$ für $1 \leq k \leq m$

$$\Rightarrow R(f, (a_k)_{1 \leq k \leq m}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) = S_f^+(z)$$

(3) Wähle $a_k = \frac{1}{2} \left(\frac{k-1}{m} + \frac{k}{m}\right)$ für $1 \leq k \leq m$

$$\Rightarrow R(f, (a_k)_{1 \leq k \leq m}) = \frac{1}{2}$$

Feinheit von Zerlegungen

Definition

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$ eine Zerlegung von Q . Für $1 \leq k \leq n$ sei δ_k das Maximum der Längen der durch $\mathcal{Z}_k$ definierten Intervalle. Dann wird

$$\delta(\mathcal{Z}) = \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$$

die **Feinheit** der Zerlegung $\mathcal{Z}$ genannt.

Für alle Teilquader $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ gilt dann $v(K) \leq \delta(\mathcal{Z})^n$.

Verhalten von Ober- und Untersummen bei Verfeinerungen

Lemma

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader, $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q . Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}'$ von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$ die Ungleichungen

$$0 \leq \mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z}') - \mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') < \varepsilon$$

und

$$0 \leq \mathcal{I}_f^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - \mathcal{I}_f^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$$

erfüllt sind.

Beweis des Lemmas

- Für $1 \leq k \leq n$ sei m_k jeweils die Anzahl der Zerlegungspunkte in $\mathcal{Z}_k$. Sei $\mathcal{Z}'$ eine weitere Zerlegung von Q .
- Durch Hinzunahme von $\mathcal{Z}_k$ zu $\mathcal{Z}'_k$ werden jeweils höchstens k Intervalle der Zerlegung $\mathcal{Z}'_k$ verändert. Es werden also höchstens $m = \prod_{k=1}^n m_k$ Quader der Zerlegung $\mathcal{Z}'$ weiter unterteilt.
- Es ändern sich also höchstens m Summanden in der Obersumme $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}')$. Ist δ die Feinheit von $\mathcal{Z}'$, dann hat jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z})$ höchstens das Volumen δ^n . Setzen wir $s = \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\}$, dann ändert sich jeder Summand also höchstens um den Wert $s\delta^n$, und die Summe höchstens um $ms\delta^n$.

Beweis des Lemmas

- Wählen wir für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ unser $\delta \in \mathbb{R}^+$ also so, dass $m\delta^n < \varepsilon$ erfüllt ist, dann erhalten wir

$$\mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z}') - \mathcal{I}_f^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') < \varepsilon.$$

- Für die Untersummen läuft die Argumentation analog.

Approximation von Integralen durch Riemannsche Summen

Satz

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\mathcal{Z}'$ eine Zerlegung von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$ und ist $a_K \in K$ für jedes $K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')$ jeweils ein beliebig gewählter Punkt, dann gilt

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} f(a_K) v(K) - \int_Q f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Die Summe $\sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} f(a_K) v(K)$ wird als **Riemannsche Summe** bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}'$ bezeichnet.

Beweis des Satzes

- Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $u = \int_Q f(x) dx$. Auf Grund der Riemann-Integrierbarkeit existiert eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $u - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}) < \frac{1}{4}\varepsilon$ und $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}) - u < \frac{1}{4}\varepsilon$.
- Sei $\delta \in \mathbb{R}^+$ so gewählt, dass das Lemma mit $\frac{1}{4}\varepsilon$ statt ε erfüllt ist. Sei $\mathcal{Z}'$ eine Zerlegung von Q mit $\delta(\mathcal{Z}') < \delta$.
- Auf Grund des Lemmas gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}') - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}') &\leq \\ (\mathcal{S}^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') + \tfrac{1}{4}\varepsilon) - (\mathcal{S}^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - \tfrac{1}{4}\varepsilon) &\leq \\ \mathcal{S}^+(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') - \mathcal{S}^-(\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z}') + \tfrac{1}{2}\varepsilon &\leq \\ \mathcal{S}^+(\mathcal{Z}) - \mathcal{S}^-(\mathcal{Z}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon &\leq (u + \tfrac{1}{4}\varepsilon) - (u - \tfrac{1}{4}\varepsilon) + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Beweis des Satzes

- Sei nun $s = \sum_{K \in \mathcal{Q}(\mathcal{Z}')} f(a_K) v(K)$ eine Riemannsche Summe bezüglich $\mathcal{Z}'$. Es gilt sowohl

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}') \leq s \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}')$$

als auch

$$\mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}') \leq u \leq \mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}').$$

- Wegen $\mathcal{S}_f^+(\mathcal{Z}') - \mathcal{S}_f^-(\mathcal{Z}') < \varepsilon$ folgt daraus $|s - u| < \varepsilon$.

Der Transformationssatz

Satz (4.6)

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir voraussetzen, dass $\det \varphi'(t)$ entweder für alle $t \in G$ positiv oder für alle $t \in G$ negativ ist. Sei $T \subseteq G$ eine Jordan-messbare, kompakte Teilmenge und $f : \varphi(T) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann gilt

- (i) Die Bildmenge $\varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar.
- (ii) Die Funktion f ist auf $\varphi(T)$, die Funktion $f \circ \varphi$ auf T Riemann-integrierbar.
- (iii) Es gilt
$$\int_{\varphi(T)} f(x) \, dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| \, dt.$$

Beweis des Transformationssatzes, Vorbereitungen

zu (i)

- Da φ ein Homöomorphismus (sogar ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus) ist, gilt $\varphi(\partial T) = \partial(\varphi(T))$.
- Weil T Jordan-messbar und kompakt ist, handelt es sich nach Folgerung 3.5 bei ∂T um eine kompakte Jordansche Nullmenge.
- Als Bild einer kompakten Nullmenge unter einer stetig differenzierbaren Abbildung ist $\partial(\varphi(T))$ nach Folgerung 4.5 eine kompakte Jordansche Nullmenge.
- Wiederum nach Folgerung 3.5 ist $\varphi(T)$ Jordan-messbar.

Beweis des Transformationssatzes, Vorbereitungen

zu (ii)

- Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass stetige Funktionen und beschränkte Funktionen auf Jordan-messbaren Teilmengen nach Proposition 3.11 Riemann-integrierbar sind.
- Denn nach Voraussetzung ist f stetig auf der kompakten Menge $\varphi(T)$ und damit beschränkt nach dem Maximumsprinzip.
- Daraus folgt unmittelbar, dass auch $f \circ \varphi$ auf T stetig und beschränkt ist.

Beweis des Transformationssatzes, 1. Schritt

Ziel: Nachweis der Ungleichung $v(\varphi(W)) \leq \int_W |\det \varphi'(x)| dx$ für einen kompakten Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^n$ der Kantenlänge 2ℓ , $\ell \in \mathbb{R}^+$

- Sei $q \in \mathbb{N}$. Wir unterteilen W in q^n kompakte Würfel $W_{j,q}$ der Kantenlänge $\frac{2\ell}{q}$. Sei $p_{j,q}$ jeweils der Mittelpunkt von $W_{j,q}$ und $\phi_{j,q} = \varphi'(p_{j,q})$.
- Sei jeweils $j, q : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\chi_{j,q} = \phi_{j,q}^{-1} \circ \varphi$. Auf Grund der mehrdimensionalen Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\chi'_{j,q}(x) &= (\phi_{j,q}^{-1})'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x) = \\ \phi_{j,q}^{-1} \circ (\varphi'(p_{j,q}) + (\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q}))) &= \\ \text{id}_{\mathbb{R}^n} + \phi_{j,q}^{-1} \circ (\varphi'(x) - \varphi'(p_{j,q}))\end{aligned}$$

für alle $x \in W_{j,q}$.

Beweis des Transformationssatzes, 1. Schritt

- Als stetige Funktion auf der kompakten Menge W ist φ' dort gleichmäßig stetig. Der Abstand $\|x - p_j\|_\infty$ für $x \in W_{j,q}$ ist durch $\frac{\ell}{q}$ beschränkt. Es gibt deshalb eine Folge $(\tilde{\delta}_q)_{q \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_q \tilde{\delta}_q = 0$ und $\|\varphi'(x) - \varphi'(p_j)\| \leq \tilde{\delta}_q$ für alle $x \in W_{j,q}$, und alle j und q .
- Auf Grund der Gleichung auf der letzten Seite existiert auch eine Folge $(\delta_q)_{q \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_q \delta_q = 0$ und $\|\chi'_{j,q}(x)\| \leq 1 + \delta_q$ für alle $x \in W_{j,q}$, und alle j und q .
- Für alle $x \in W_{j,q}$ erhält man, genau wie im Beweis von Satz 4.2, mit Hilfe des Mittelwertsatzes für Richtungsableitungen jeweils die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\chi_{j,q}(x) - \chi_{j,q}(p_j)| &\leq \\ \max\{\|\chi'_{j,q}(x)\| \mid x \in W_{j,q}\} \cdot \|x - \chi_j\|_\infty &\leq (1 + \delta_q) \frac{\ell}{q} . \end{aligned}$$

Beweis des Transformationssatzes, 1. Schritt

- Dies zeigt, dass die Bildmenge $\chi_{j,q}(W_{j,q})$ jeweils in einem Würfel der Kantenlänge $(1 + \delta_q) \frac{2\ell}{q}$ enthalten ist.
- Es folgt $v(\chi_{j,q}(W_{j,q})) \leq (1 + \delta_q)^n \left(\frac{2\ell}{q}\right)^n$.
- Weil sich die Teilwürfel $W_{j,q}$ und auch ihre Bilder nur in Randpunkten schneiden, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} v(\varphi(W)) &= \sum_j v(\varphi(W_{j,q})) = \\ \sum_j v(\phi'(p_{j,q})(\chi_{j,q}(W_{j,q}))) &= \sum_j |\det(\varphi'(p_{j,q}))| v(\chi_{j,q}(W_{j,q})) \\ &\leq (1 + \delta_q)^n \sum_j |\det(\varphi'(p_{j,q}))| \left(\frac{2\ell}{q}\right)^n \\ &= (1 + \delta_q)^n \sum_j |\det(\varphi'(p_{j,q}))| v(W_{j,q}). \end{aligned}$$

Beweis des Transformationssatzes, 1. Schritt

- Bei der letzten Summe handelt es sich für jedes q jeweils um eine **Riemannsche Summe** der Funktion $x \mapsto |\det(\varphi'(x))|$ zu einer Zerlegung der Feinheit δ_q des Würfels W .
- Für $q \rightarrow \infty$ geht $\delta_q \rightarrow 0$, und auf Grund des Satzes von oben konvergiert die Folge Riemannscher Summen gegen das Integral $\int_W |\det(\varphi'(x))| dx$. Außerdem konvergiert der Vorfaktor $(1 + \delta_q)^n$ gegen 1.
- Somit erhalten wir für $q \rightarrow \infty$ tatsächlich die Ungleichung

$$v(\varphi(W)) \leq \int_W |\det(\varphi'(x))| dx.$$

Beweis des Transformationssatzes, 2. Schritt

Ziel: Nachweis der Ungleichung

$\int_{\varphi(W)} f(x) dx \leq \int_W (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| dt$ für eine stetige, **nichtnegative** Funktion f auf $\varphi(W)$, für einen kompakten Würfel W

- Wir verwenden dieselbe Notation wie im 1. Schritt. Für alle j und q bezeichnet $t_q : \varphi(W) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die jeweils $t_q(x) = f(\varphi(p_{j,q}))$ für jeden Punkt x im Inneren einer Bildmenge $\varphi(W_{j,q})$ erfüllt.
- Für alle Punkte $x \in \varphi(W)$, die in der Vereinigung der Ränder der Bildmengen $\varphi(W_{j,q})$ liegen, fordern wir lediglich, dass $t_q(x) = f(\varphi(p_{j,q}))$ für ein j mit $x \in \varphi(W_{j,q})$ gilt.
- Da f auf $\varphi(W)$ gleichmäßig stetig ist, und auf Grund der beschränkten Ausdehnung der Bildmengen $\varphi(W_{j,q})$ nach Schritt 1, konvergiert die Funktionenfolge $(t_q)_{q \in \mathbb{N}}$ auf $\varphi(W)$ **gleichmäßig gegen f** . Daraus folgt

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \int_{\varphi(W)} t_q(x) dx = \int_{\varphi(W)} f(x) dx.$$

Beweis des Transformationssatzes, 2. Schritt

- Weil die Funktion t_q auf den Mengen $\varphi(W_{j,q})^\circ$ jeweils **konstant** ist, gilt

$$\int_{\varphi(W)} t_q(x) dx = \sum_j f(\varphi(p_{j,q})) v(\varphi(W_{j,q})).$$

- Auf Grund der Ergebnisse aus dem 1. Schritt gilt die Abschätzung

$$\sum_j f(\varphi(p_{j,q})) v(\varphi(W_{j,q})) \leq (1+\delta_q)^n \sum_j (f \circ \varphi)(p_{j,q}) |\det(\varphi'(p_{j,q}))| v(W_{j,q}).$$

- Auf der rechten Seite der Ungleichung steht wiederum eine **Riemannsche Summe**. Lassen wir q gegen unendlich laufen, so wird die Ungleichung zu

$$\int_{\varphi(W)} f(x) dx \leq \int_W (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt.$$

Beweis des Transformationssatzes, 3. Schritt

Ziel: Verallgemeinerung der Ungleichung von Würfeln auf beliebige kompakte Jordan-messbare Mengen

- Sei $Q \subseteq G$ ein kompakter Quader, und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig vorgegeben. Nach Lemma 4.3 existiert eine endliche Familie $(W_j)_{j \in J}$ von Würfeln, die Q überdecken und sich höchstens in Randpunkten schneiden, mit $\sum_{j \in J} v(W_j) < v(Q) + \varepsilon$.
- Setzen wir $s = \max\{(f \circ \varphi)(t) | \det(\varphi'(t))| \mid t \in Q\}$, dann folgt

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(Q)} f(x) dx &\leq \sum_{j \in J} \int_{\varphi(W_j)} f(x) dx \leq \\ \sum_{j \in J} \int_{W_j} (f \circ \varphi)(t) | \det(\varphi'(t)) | dt &\leq \int_Q (f \circ \varphi)(t) | \det(\varphi'(t)) | dt + s\varepsilon. \end{aligned}$$

Beweis des Transformationssatzes, 3. Schritt

- Weil $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig klein gewählt werden kann, ist die Ungleichung damit für Quader bewiesen.
- Da jede Figur eine Vereinigung von Quadern ist, die sich höchstens in Randpunkten schneiden, gilt die Ungleichung damit auch für Figuren.
- Auf ähnliche Weise wie beim Übergang von Würfeln zu Quadern verwendet man nun, dass für jede kompakte Jordan-messbare Teilmenge $T \subseteq G$ und jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine Figur F mit $F \supseteq T$ und $v(F) < v(T) + \varepsilon$ existiert. Dies zeigt, dass die Ungleichung auch für kompakte Jordan-messbare Teilmengen gilt.

Beweis des Transformationssatzes, 4. Schritt

Ziel: Umwandlung der Ungleichung in eine Gleichung

- Sei $T \subseteq G$ kompakt und Jordan-messbar, und sei $\psi : \varphi(G) \rightarrow G$ die Umkehrabbildung von φ . Da auch ψ ein $\mathcal{C}^1$ -Diffeomorphismus, und Anwendung der bereits bewiesenen Ungleichung auf die Funktion $t \mapsto (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))|$ liefert

$$\int_{\psi(\varphi(T))} (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt \leq \int_{\varphi(T)} (f \circ \varphi \circ \psi)(x) \cdot |\det(\varphi'(\psi(x)))| \cdot |\det(\psi'(x))| dx.$$

- Wegen $\psi = \varphi^{-1}$ gilt $\psi(\varphi(T)) = T$ und $f \circ \varphi \circ \psi = f$.

Beweis des Transformationssatzes, 4. Schritt

- Die mehrdimensionale Kettenregel, angewendet auf $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\varphi(G)}$, liefert für alle $x \in \varphi(T)$ andererseits

$$\begin{aligned}\text{id}_{\mathbb{R}^n} &= \text{id}'_{\varphi(G)}(x) = (\varphi \circ \psi)'(x) \\ &= \varphi'(\psi(x)) \circ \psi'(x)\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}|\det(\varphi'(\psi(x)))| \cdot |\det(\psi'(x))| &= |\det(\varphi'(\psi(x)) \circ \psi'(x))| \\ &= |\det(\text{id}_{\mathbb{R}^n})| = 1.\end{aligned}$$

- Durch Einsetzen erhalten wir

$$\int_T (f \circ \varphi)(t) |\det(\varphi'(t))| dt \leq \int_{\varphi(T)} f(x) dx$$

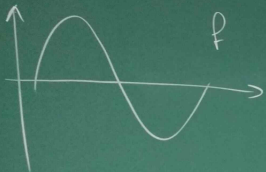
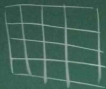
und somit insgesamt Gleichheit.

Beweis des Transformationssatzes, 5. Schritt

Ziel: Verallgemeinerung auf beliebige stetige (nicht notwendigerweise nichtnegative) Funktionen $f : \varphi(T) \rightarrow \mathbb{R}$

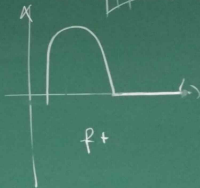
- Mit f sind auch $f_+ = \max\{f, 0\}$ und $f_- = -\min\{f, 0\}$ stetige Funktionen auf $\varphi(T)$. Diese sind stetig, nichtnegativ, und es gilt $f = f_+ - f_-$. Auf Grund der Verträglichkeit des Riemann-Integrals mit Addition und Subtraktion erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(T)} f(x) \, dx &= \int_{\varphi(T)} f_+(x) \, dx - \int_{\varphi(T)} f_-(x) \, dx = \\&\int_T (f_+ \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| \, dt - \int_T (f_- \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| \, dt \\&= \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| \, dt.\end{aligned}$$



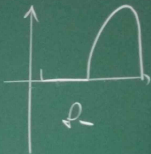
f

$=$



f_+

$-$



f_-