

## Der Transformationssatz

### Satz (4.6)

Sei  $G \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, und sei  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine injektive, stetig differenzierbare Abbildung, wobei wir voraussetzen, dass  $\det \varphi'(t)$  entweder für alle  $t \in G$  positiv oder für alle  $t \in G$  negativ ist. Sei  $T \subseteq G$  eine Jordan-messbare, kompakte Teilmenge und  $f : \varphi(T) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Dann gilt

- (i) Die Bildmenge  $\varphi(T) \subseteq \mathbb{R}^n$  ist Jordan-messbar.
- (ii) Die Funktion  $f$  ist auf  $\varphi(T)$ , die Funktion  $f \circ \varphi$  auf  $T$  Riemann-integrierbar.
- (iii) Es gilt 
$$\int_{\varphi(T)} f(x) \, dx = \int_T (f \circ \varphi)(t) |\det \varphi'(t)| \, dt.$$

**Zusatz:** Der Transformationssatz ist auch dann noch gültig, wenn eine Jordansche Nullmenge  $N \subseteq T$  existiert, auf der die Funktion  $t \mapsto \det \varphi'(t)$  möglicherweise Null wird. Ebenso genügt es, dass  $\varphi$  auf  $T \setminus N$  injektiv ist.

## Spezialfälle des Transformationssatzes

- (i) Setzt man  $n = 1$ , ist  $G \subseteq \mathbb{R}$  offen und  $T \subseteq G$  ein Intervall, auf dem die Ableitung von  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}$  nicht null wird, so erhält man aus dem Transformationssatz die Substitutionsregel aus der Analysis einer Variablen zurück.
- (ii) Wendet man den Transformationssatz auf die konstante Funktion  $f = 1$  an, so erhält man die Gleichung

$$v(\varphi(T)) = \int_T |\det \varphi'(t)| dt$$

für jede Jordan-messbare Teilmenge  $T \subseteq G$ .

- (iii) Ist insbesondere  $\varphi$  eine **bijektive lineare** Abbildung, dann erhält man  $v(\varphi(T)) = |\det \varphi| v(T)$ .

## Anwendung auf Abbildungen in Polarkoordinaten Erinnerung:

### Definition der Polarkoordinaten-Abbildung

$$\rho_{\text{pol}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi))$$

### Folgerung

Ist  $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$  kompakt und Jordan-messbar und  $f : \rho_{\text{pol}}(T) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, dann gilt

$$\int_{\rho_{\text{pol}}(T)} f(x, y) d(x, y) = \int_T (f \circ \rho_{\text{pol}})(r, \varphi) \cdot r d(r, \varphi).$$

### Anwendung: Berechnung der Volumina

(i) des Kegels

$$K_{s,h} = \{(x, y, z) \mid \|(x, y)\|_2 \leq s, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{s}\|(x, y)\|_2\}$$

(ii) der Halbkugel

$$H_s \{(x, y, z) \mid \|(x, y, z)\|_2 \leq s, z \geq 0\}$$

Berechnung des Kegelvolumens mit  
der Transformationsformel

$$K_{s,h} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y)\|_2 \leq s, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{s} \|(x,y)\|_2 \}$$

$$\bar{B}_s = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_2 \leq s \}$$

$$f: \bar{B}_s \rightarrow \mathbb{R}_+, (x,y) \mapsto h - \frac{h}{s} \|(x,y)\|_2$$

$$\text{Beh.: } K_{s,h} = \Lambda(f) \quad \text{Sei } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$(x,y,z) \in \Lambda(f) \iff (x,y) \in \bar{B}_s, 0 \leq z \leq f(x,y)$$

$$\iff (x,y) \in \bar{B}_s, 0 \leq z \leq h - \frac{h}{s} \|(x,y)\|_2$$

$$\iff (x,y,z) \in K_{s,h}$$

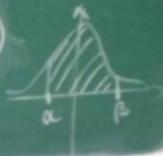
$$\begin{aligned}
 v(K_{s,h}) &= v(\Lambda(f)) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) d(x,y) \\
 &= \int_{\rho_{\text{pol}}([0,s] \times [0,2\pi])} f(x,y) d(x,y) = \int_{[0,s] \times [0,2\pi]} (f \circ \rho_{\text{pol}})(r,\varphi) r d(r,\varphi)
 \end{aligned}$$

$$\int_{[0,s] \times [0,2\pi]} f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) r d(r,\varphi) = \int_{[0,s] \times [0,2\pi]} (h - \frac{h}{s}r) r d(r,\varphi)$$

$$= \int_0^s \left( \int_0^{2\pi} (h - \frac{h}{s}r) r d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^s (hr - \frac{h}{s}r^2) dr$$

$$= 2\pi \left[ \frac{1}{2}hr^2 - \frac{1}{3}\frac{h}{s}r^3 \right]_0^s = 2\pi \left( \frac{1}{2}hs^2 - \frac{1}{3}hs^2 \right)$$

$$= 2\pi s^2 h \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}\pi s^2 h$$



## Dichtefunktion der Normalverteilungen

### Definition

Sei  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$ . Die **Dichtefunktion der Normalverteilung** zum Mittelwert  $\mu$  und der Standardabweichung  $\sigma$  ist die Funktion  $f_{\mu,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Ist  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ , dann spricht man von der **Standard-Normalverteilung**.

## Bedeutung der Normalverteilungen

- Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha < \beta$  gibt das Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f_{\mu, \sigma}(x) dx$$

die **Wahrscheinlichkeit** dafür an, dass in einer Menge mit einem mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$  normalverteilten numerischen Merkmal (zum Beispiel Körpergröße oder Intelligenzquotient) ein zufällig gewähltes Element seinen Wert im Intervall  $[\alpha, \beta]$  hat.

- Für  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$  beträgt diese Wahrscheinlichkeit beispielsweise  $\approx 68,3\%$ .
- Ist  $N \in \mathbb{N}$  und  $\mathcal{X}$  die Menge der Zufallsexperimente „ $N$ -faches Würfeln“ (mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel) und betrachtet man als Merkmal den durchschnittlich gewürfelten Wert, dann nähert sich die Verteilung dieses Merkmals für  $N \rightarrow \infty$  einer Normalverteilung mit  $\mu = 3,5$  und  $\sigma \approx 1,71$  an (**Gesetz der großen Zahlen**).

## Das Gauß'sche Fehlerintegral

### Satz

Für alle  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma \in \mathbb{R}^+$  gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\mu,\sigma}(x) dx = 1.$$

- Für  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$  bezeichnet man dieses Integral als **Gauß'sches Fehlerintegral**.
- Der einfachste Beweis dieser Gleichung verwendet den **Transformationsatz** im  $\mathbb{R}^2$ .

Beh.  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  Ralf Ge

klar: Das Integral (als uneigentl. Riemann-Integral, d.h. als Grenzwert

$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$  existiert), da

die Integrale  $\int_1^R e^{-x^2} dx$ ,  $\int_{-R}^{-1} e^{-x^2} dx$

z.B. durch die Integrale über  $e^{-x} dx$  abgeschätzt werden können.

Die Klammer gehört vor, und nicht hinter, das Wort „existiert“. Das Integral von  $-\infty$  bis  $-1$  müsste durch das Integral über die Funktion  $x \mapsto e^x$  abgeschätzt werden, nicht durch  $t \mapsto e^{-x}$ .

Sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto -x^2$

Dann gilt  $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) f(y) d(x,y) =$

$$\int_{-R}^R \left( \int_{-R}^R f(x) f(y) dy \right) dx =$$

$$\int_{-R}^R f(x) \left( \int_{-R}^R f(y) dy \right) dx =$$

$$\left( \int_{-R}^R f(x) dx \right) \left( \int_{-R}^R f(y) dy \right)$$

anderseits  $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) f(y) d(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} d(x,y)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2} d(x,y)$$

Es gilt also

$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{[-R, R]^2} e^{-x^2 - y^2} d(x, y)$$

Für jedes  $R \in \mathbb{R}^+$  setze

$$Q_R = [-R, R]^2, \quad \bar{B}_R = \{(x, y) \mid \|(x, y)\|_2 \leq R\}$$

$$\text{Es gilt } Q_{R/2} \subseteq \bar{B}_R \subseteq Q_R$$



Daraus folgt

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\bar{B}_R} e^{-x^2 - y^2} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R} e^{-x^2 - y^2} d(x, y)$$

$d(x, y)$

$$\int_{\overline{B}_R} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \int_{\text{polar}([0,R] \times [0,2\pi])} e^{-x^2-y^2} d(x,y) =$$

$$\int_{[0,R] \times [0,2\pi]} e^{-r^2} r d(r,\varphi) = 2\pi \int_0^R r e^{-r^2} dr =$$

$$\pi \int_0^R (2r) e^{-r^2} dr = -\pi \int_0^{R^2} e^{-t} dt$$

$$= -\pi [-e^{-t}]_0^{R^2} = \pi(1 - e^{-R^2})$$

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\overline{B}_R} e^{-x^2-y^2} d(x,y) = \pi$$

## Abbildungen in Zylinderkoordinaten

**Erinnerung:** Definition der Zylinderkoordinaten-Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad (r, h, \varphi) \mapsto (r \cos(\varphi), r \sin(\varphi), h)$$

### Folgerung

Ist  $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$  kompakt und Jordan-messbar und  $f : \rho_{\text{zyl}}(T) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt

$$\int_{\rho_{\text{zyl}}(T)} f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_T (f \circ \rho_{\text{zyl}})(r, h, \varphi) \cdot r d(r, h, \varphi).$$

## Abbildungen in Kugelkoordinaten

Erinnerung: Definition der Kugelkoordinaten-Abbildung

$$\begin{aligned} \rho_{\text{kug}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \\ (r, \vartheta, \varphi) &\mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

### Folgerung

Ist  $T \subseteq \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$  kompakt und Jordan-messbar und  $f : \rho_{\text{kug}}(T) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\rho_{\text{kug}}(T)} f(x, y, z) \, d(x, y, z) &= \\ \int_T (f \circ \rho_{\text{kug}})(r, \vartheta, \varphi) \cdot r^2 \sin(\vartheta) \, d(r, \vartheta, \varphi). \end{aligned}$$

## Definition der Figuren

### Definition

Eine **Figur** im  $\mathbb{R}^n$  ist eine endliche Vereinigung

$$F = Q_1 \cup \dots \cup Q_r$$

von Quadern  $Q_i$  mit  $Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$  für  $i \neq j$ . Auch die leere Menge betrachten wir als Figur. (Hier ist  $r = 0$ .)

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{F}$  die Menge der Figuren im  $\mathbb{R}^n$  und mit  $\mathcal{J}$  die Menge der Jordan-messbaren Teilmengen im  $\mathbb{R}^n$ .

## Definition der Inhaltsfunktionen

### Definition

Eine **Inhaltsfunktion** ist eine Abbildung  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit folgenden Eigenschaften.

- (i) Aus  $A \subseteq B$  folgt  $\mu(A) \leq \mu(B)$ , für alle  $A, B \in \mathcal{J}$ .
- (ii) Für alle  $A, B \in \mathcal{J}$  mit  $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$  gilt  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .
- (iii) Es gilt  $\mu(v + A) = \mu(A)$  für alle  $v \in \mathbb{R}^n$  und  $A \in \mathcal{J}$ .
- (iv) Es gilt  $\mu([0, 1]^n) = 1$ .

zu iii) Die Gleichung folgt aus  $v(A \cap B) = 0$

geg:  $A^\circ \cap B^\circ = \emptyset$

$$\begin{aligned} A \cap B &\subseteq \bar{A} \cap \bar{B} = (A^\circ \cup \partial A) \cap (B^\circ \cup \partial B) \\ &= (A^\circ \cap B^\circ) \cup (\partial A \cap B^\circ) \cup (\partial B \cap A^\circ) \cup (\partial A \cap \partial B) \end{aligned}$$

$= \emptyset$   $\partial A \cap \partial B$  sind Jordansche Nullmengen,

da  $A, B \in \mathcal{J}$ .  $\rightarrow A \cap B$  ist  $\mathcal{J}$  Nullmenge, d.h.

$$v(A \cap B) = 0.$$

## Existenz von Inhaltsfunktionen

**Erinnerung:** Ist  $A \in \mathcal{M}_{m \times n, \mathbb{R}}$ , dann bezeichnen wir mit  $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Abbildung  $v \mapsto Av$ .

### Lemma

- (i) Der Jordan-Inhalt  $v = v_n$  ist eine Inhaltsfunktion auf  $\mathcal{J}$ .
- (ii) Ist  $\mu : \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Inhaltsfunktion und  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , dann ist auch durch

$$B \mapsto c_A^{-1} \mu(\phi_A(B))$$

mit der Konstanten  $c_A = \mu(\phi_A([0, 1]^n)) \in \mathbb{R}^+$  eine Inhaltsfunktion definiert.

## Polarzerlegung invertierbarer Matrizen

Wie im letzten Semester bezeichnen wir mit

$$\mathcal{O}(n) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tAA = E_n\}$$

die Gruppe der **orthogonalen Matrizen**.

### Satz

Für jede Matrix  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  gibt es ein  $U \in \mathcal{O}(n)$  und eine symmetrische Matrix  $S$  mit  $A = US$ .

Beweis der Polarzerlegung. geg.  $A \in GL_n(\mathbb{R})$

leicht zu überprüfen:  ${}^tAA$  ist symmetrisch und positiv definit

Beh.  $\exists S \in M_n(\mathbb{R})$ , symm. und positiv definit mit  $S^2 = {}^tAA$

Die Anwendung des Spektralsatzes aus der Linearen Alg

liefert eine Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  mit  $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$   $\forall i$  und ein  $V \in O(n)$  mit  ${}^tAA = {}^tVDV$

Setze  $\sqrt{D} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ ,  $S = {}^tV\sqrt{D}V$

überprüfe:  $S$  ist symm. und positiv definit, außerdem

$$S^2 = {}^tV\sqrt{D}V {}^tV\sqrt{D}V \stackrel{V \in O(n)}{=} {}^tV\sqrt{D}\sqrt{D}V = {}^tVDV = {}^tAA$$

Sei nun  $U = AS^{-1} \Rightarrow A = US$

zu überprüfen:  $U \in O(n)$

$${}^t U U = {}^t (AS^{-1}) AS =$$

$${}^t (S^{-1})^t A A S = {}^t (S^{-1}) S^2 S^{-1}$$

$S$  symm.

$$= S^{-1} S^2 S^{-1} = E_n \Rightarrow U \text{ orth. } \square$$

## Eindeutigkeit von Inhaltsfunktionen

### Satz

- (i) Es gibt genau eine Inhaltsfunktion auf  $\mathcal{J}$ , den Jordan-Inhalt.
- (ii) Für alle  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  und alle  $B \in \mathcal{J}$  gilt  
$$v(\phi_A(B)) = |\det(A)|v(B).$$

zur Eindeutigkeit des Inhaltsmaß:

geg sei eine bel. Inhaltsmaß  $\mu: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}_+$

zuz:  $\mu(B) = v(B) \quad \forall B \in \mathcal{J}$

Schrittweises Vorgehen:

(1)  $\mu, v$  sind auf dem Einheitswürfel  $[0,1]^n$   
gleich  $\Rightarrow \mu(W) = v(W) = q^{-n}$  für jeden  
Würfel  $W$  der Kantenlänge  $\frac{1}{q}$ ,  $q \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mu, v$  stimmen überein auf bel. Würfeln  
rationaler Kantenlänge  $\Rightarrow$  auf bel. Quadern  
rat. Kantenlänge

(2) Sei  $Q$  ein bel. Quader und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$   
 $\rightarrow \exists$  Quader  $Q_1, Q_2$  mit rationalen Kantenlängen

so dass  $Q_1 \subseteq Q \subseteq Q_2$  und  
 $v(Q_2) - v(Q_1) = v(Q_2 | Q_1) < \varepsilon$

$$\Rightarrow \mu(Q) - v(Q) \leq \mu(Q_2) - v(Q_1) \\ = v(Q_2) - v(Q_1) < \varepsilon$$

$$v(Q) - \mu(Q) \leq v(Q_2) - \mu(Q_1) \\ = v(Q_2) - v(Q_1) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |v(Q) - \mu(Q)| < \varepsilon$$

Da  $\varepsilon$  bel klein gewählt werden kann,  
folgt  $v(Q) = \mu(Q)$

Für Teil (i) fehlen nun noch die Nachweise, dass  $\mu$  und  $\nu$  auf der Menge  $\mathcal{F}$  aller Figuren, und dann auch auf der Menge  $\mathcal{J}$  aller Jordan-messbaren Teilmengen, übereinstimmen. Die Aussage für  $\mathcal{F}$  ergibt sich unmittelbar aus der Eigenschaft (ii) der Inhalt-funktionen. Der Beweis für ganz  $\mathcal{J}$  funktioniert ähnlich wie beim Übergang von Quadern mit rationalen Kantenlängen zu beliebigen Quadern.