Kriterium für die Jordan-Messbarkeit

Proposition (3.4)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge, Q ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und χ_A die zugehörige charakteristische Funktion. Dann sind die Randpunkte von A genau die Unstetigkeitsstellen von χ_A.

Folgerung (3.5)

Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ∂A eine Nullmenge ist.

Rechenregeln für das Jordan-Volumen

Lemma (3.6)

Seien (X, d) ein metrischer Raum, und seien $A, B \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Dann sind die Ränder $\partial(A \cap B)$, $\partial(A \cup B)$ und $\partial(A \setminus B)$ jeweils in $(\partial A) \cup (\partial B)$ enthalten.

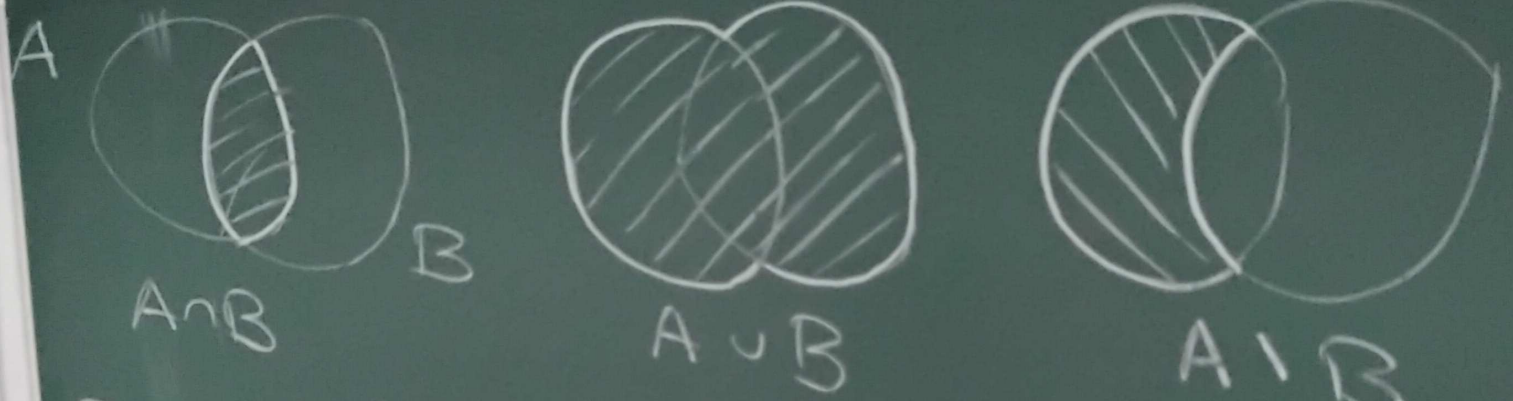
Folgerung (3.7)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei Jordan-messbare Teilmengen.

(i) Dann sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ Jordan-messbar.

(ii) Aus $A \subseteq B$ folgt $v(A) \leq v(B)$ und $v(B \setminus A) = v(B) - v(A)$.

(iii) In jedem Fall gilt $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$.



Beweis von Lemma 3.6. für $A \cap B$

geg.: metr. Raum (X, d), $A, B \subseteq X$

Sei $x \in \partial(A \cap B)$. z.zg.: $x \in (\partial A) \cup (\partial B)$

Vor.: In jeder Umg. von x gibt es Punkte aus $A \cap B$ und aus $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

In jeder Umg von x gibt es Punkte aus A und

Punkte aus B. außerdem: $\exists$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $X\setminus(A\cup B) = (X\setminus A)\cup(X\setminus B)$ $\Rightarrow$ unendl. viele Folgenglieder liegen in $X\setminus A$ <u>oder</u> unendl viele Folgenglieder liegen in $X\setminus B$

$\Rightarrow$ In jeder Umg. von x gibt es Punkte aus $X\setminus A$ <u>oder</u> in jeder Umg gibt es Pkt. aus $X\setminus B$.

$\rightarrow$ $x\in\partial A$ oder $x\in\partial B$ $\Rightarrow$ Beh.

$\square$

Bew. von Lemma (3.7) (ii)

geg.: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, Jordan-messb.

Aus $A \subseteq B$ folgt $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$

$\forall x \in Q$, wobei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ Quader, $Q^\circ \supseteq B$

$$\Rightarrow v(A) = \int_Q \chi_A(x)\,dx \leq \int_Q \chi_B(x)\,dx = v(B)$$

Bew. der Gleichung $v(B \setminus A) = v(B) - v(A)$

$\Rightarrow$ gilt $\chi_{B\setminus A}(x) = \chi_B(x) - \chi_A(x)$ $\forall x \in Q$

$$\Rightarrow v(B\setminus A) = \int_Q \chi_{B\setminus A}(x)\,dx = \int_Q \chi_B(x)\,dx - \int_Q \chi_A(x)\,dx = v(B) - v(A)$$

zu (iii) zzg.: $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$

Das folgt genauso aus

$$\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x)$$

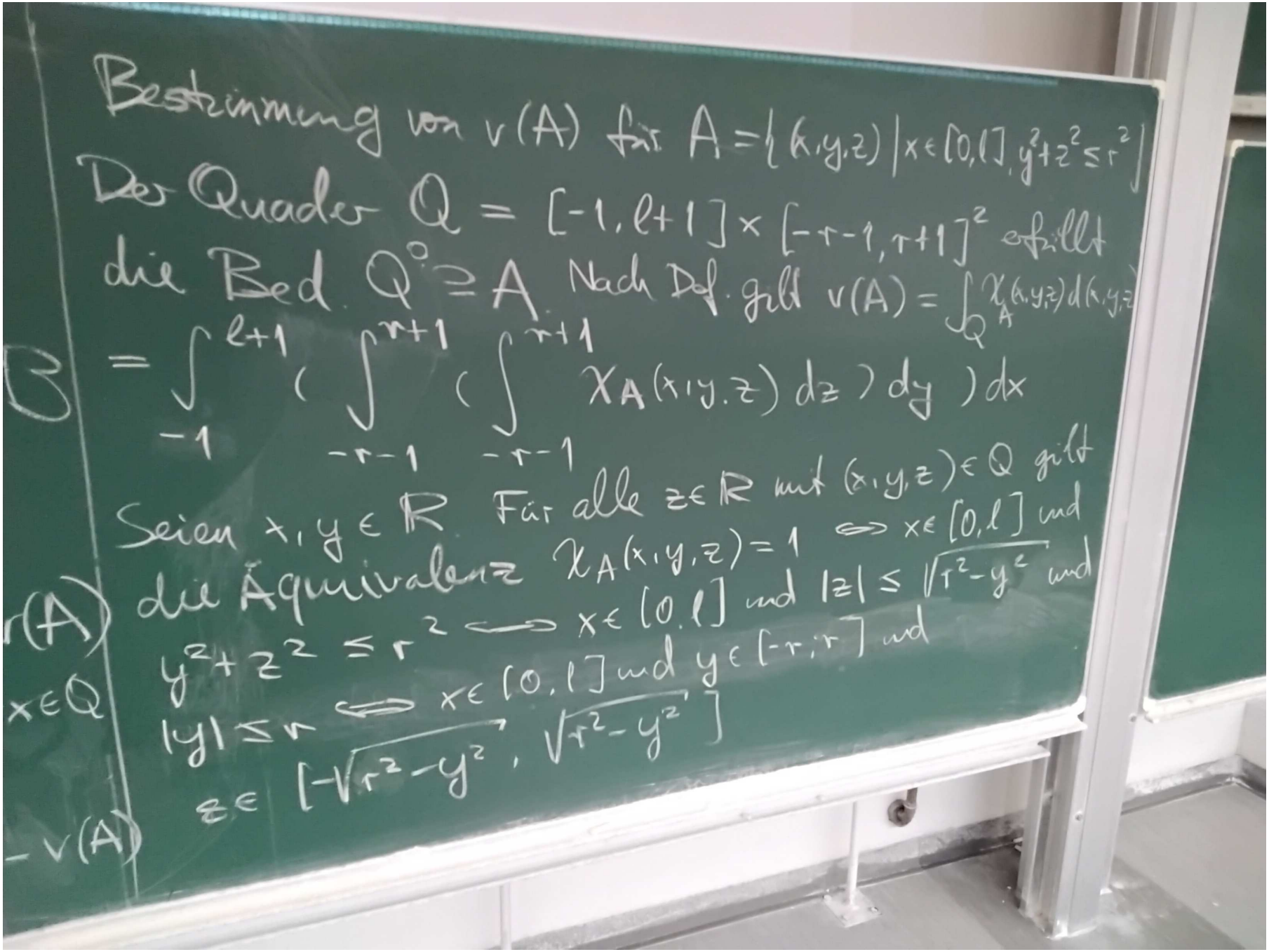
für alle $x \in Q$.

Beispiel: Bestimmung des Zylinder-Volumens

$$A \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \ell \ , \ y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

Ergebnis:

$$v(A) \quad = \quad \ell \pi r^2$$


Bestimmung von $v(A)$ für $A = \{(x,y,z) \mid x \in [0,l],\ y^2+z^2 \le r^2\}$
Der Quader $Q = [-1, l+1] \times [-r-1, r+1]^2$ erfüllt die Bed. $Q^\circ \supseteq A$. Nach Def. gilt $v(A) = \int_Q \chi_A(x,y,z)\, d(x,y,z)$
$= \int_{-1}^{l+1} \left(\int_{-r-1}^{r+1} \left(\int_{-r-1}^{r+1} \chi_A(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $(x,y,z) \in Q$ gilt die Äquivalenz $\chi_A(x,y,z) = 1$
$y^2+z^2 \le r^2 \iff x \in [0,l]$ und $|z| \le \sqrt{r^2-y^2}$ und
$|y| \le r \iff x \in [0,l]$ und $y \in [-r,r]$ und
$z \in [-\sqrt{r^2-y^2}, \sqrt{r^2-y^2}]$
$r(A)$
$x \in Q$
$- v(A)$

B)

also: $\int_{-r-1}^{r+1} \chi_A(x,y,z)\,dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin [0,l] \text{ od} \\ & y \notin [-r,r] \\ 2\sqrt{r^2-y^2} & \text{sonst} \end{cases}$

einsetzen $\Rightarrow V(A) = \int_0^l \left(\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy \right) dx =$

$\int_0^l \pi r^2\,dx = l\pi r^2$ □

Weitere Eigenschaften des Jordan-Volumens

Satz (3.8)

Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn A Jordan-messbar ist und $v(A) = 0$ gilt.

Satz (3.9)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge.

- *Translationsinvarianz*
  Für jedes $u \in \mathbb{R}^n$ ist auch $u + A$ Jordan-messbar, und es gilt $v(u + A) = v(A)$.
- *Skalierungseigenschaft*
  Für jedes $r \in \mathbb{R}^+$ ist auch rA Jordan-messbar, und es gilt $v(rA) = r^n v(A)$.

Riemann-Integral auf Jordan-messbaren Definitionsbereichen

Definition (3.10)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine (beschränkte) Jordan-messbare Menge und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit $Q^\circ \supseteq A$. Eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ wird Riemann-integrierbar genannt, wenn durch

$$f_Q : Q \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{falls } x \in Q \setminus A \end{cases}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion auf Q definiert ist. In diesem Fall ist das Riemann-Integral von f auf A definiert durch

$$\int_A f(x)\, dx \quad = \quad \int_Q f_Q(x)\, dx.$$

Eigenschaften des Riemann-Integrals

Proposition (3.11)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine beschränkte Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Unstetigkeitsstellen von f eine Nullmenge in A bilden.

Es gelten die Rechenregeln

$$\int_A (f+g)(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_A (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_A f(x)\,dx$$

falls $f, g : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar sind und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in A$, dann folgt $\int_A f(x)\,dx \leq \int_A g(x)\,dx$.

Beweis von Prop. (3.11)

geg.: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messb., $f: A \to \mathbb{R}$ beschränkt

Beh.: f R.-int $\Leftrightarrow$ Menge $U_A \subseteq A$ der Unstetigkeitsstellen ist Nullmenge

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $Q^\circ \supseteq A$ und f_Q die Nullfortsetzung von f. Auf Grund des Integrierbarkeitskriteriums für f_Q genügt es z.zg.: Menge U_Q der Unstetigkeitsstellen von f_Q ist Nullmenge $\Rightarrow U_A$ ist Nullmenge

Dies folgt aus $U_A \subseteq U_Q \subseteq U_A \cup \partial A$. Die erste Inklusion ist offensichtlich. Beweis der zweiten Inklusion:

Sei $x \in U_Q$, ang. $x \notin \partial A$. z.zg.: $x \in U_A$

ei $x \in U_Q$, ang. $x \notin \partial A$. zzg: $x \in U_A$

$x \notin \partial A \Rightarrow \exists$ Umg. U von x mit (i) $U \subseteq Q \setminus A$
oder (ii) $U \subseteq A$ Ang es gilt (i) Dann ist f_Q auf
U konstant null, also stetig $\lightning$ zu $x \in U_Q$
Ang. es gilt (ii) aber $x \notin U_A$ Dann ist mit f auch
$f|_U = f_{Q|U}$ in x stetig $\Rightarrow$ f_Q ist stetig in x $\lightning$ zu $x \in U_Q$ $\square$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz (3.12)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, Jordan-messbare Menge, $f : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, außerdem $m_- = \inf\{f(x) \mid x \in A\}$ und $m_+ = \sup\{f(x) \mid x \in A\}$. Dann gilt

$$m_- v(A) \quad \leq \quad \int_A f(x)\, dx \quad \leq \quad m_+ v(A).$$

Satz (3.13)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbare Teilmengen.

(i) Ist $f : B \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $A \subseteq B$, dann ist $f|_A$ Riemann-integrierbar.

(ii) Sei $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f|_A$ und $f|_B$ auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen A und B Riemann-integrierbar sind. Dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt

$$\int_{A\cup B} f(x)\,dx \quad = \quad \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx - \int_{A\cap B} f(x)\,dx.$$

(iii) Ist $N \subseteq \mathbb{R}$ eine Jordansche Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann ist f Riemann-integrierbar, und es gilt $\int_N f(x)\,dx = 0$.

wichtiger Spezialfall:

Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ disjunkt und Jordan-messbar, dann gilt

$$\int_{A \cup B} f(x)\ dx \quad = \quad \int_A f(x)\ dx + \int_B f(x)\ dx.$$

Vernachlässigung Jordanscher Nullmengen

Satz (3.14)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Menge, $N \subseteq A$ eine Jordansche Nullmenge, und seien $f, g : A \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktionen, die auf $A \setminus N$ übereinstimmen. Dann gilt

(i) Die Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn g Riemann-integrierbar ist.

(ii) Sind f und g Riemann-integrierbar, dann gilt

$$\int_A f(x)\, dx = \int_A g(x)\, dx.$$

Graph und Ordinatenmenge einer Funktion

Definition (3.15)

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann wird

$$\Gamma(f) \quad = \quad \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \quad \subseteq \quad A \times \mathbb{R} \quad \subseteq \quad \mathbb{R}^{n+1}$$

der Graph und der Funktion f genannt. Ist f nichtnegativ, also $f(x) \geq 0$ für alle $x \in A$, dann nennt man

$$\Lambda(f) \quad = \quad \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Ordinatenmenge von f.

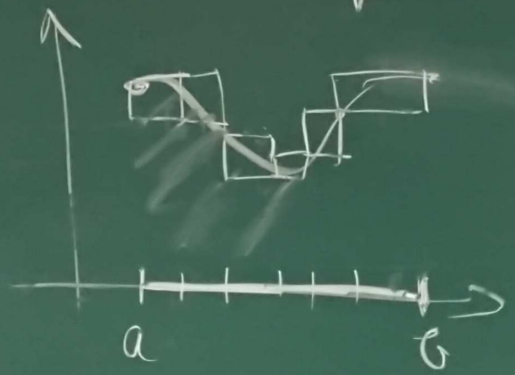
Der Graph einer Funktion als Nullmenge

Proposition (3.16)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : A \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma(f)$ eine Jordansche Nullmenge in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Lemma (3.17)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und seien $A \subseteq \mathbb{R}^m$ und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkte Teilmengen. Ist A eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m$ oder B eine Nullmengen in $\mathbb{R}^n$, dann ist $A \times B$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$.

zum Beweis von Prop. (3.16):

Ansatz: Definiere für vorgeg $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ eine endl Menge von Quadern, die $\Gamma(f)$ einhüllt und Gesamtvol. $< \varepsilon$ besitzt.