Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Lösung Blatt 12 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1}$. Wir berechnen das Kurvenintegral $\int_{\partial B_2(0)} f(z)\,dz$ durch Anwendung des Residuensatzes. Die Funktion f ist die Summe der Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ und einer weiteren Funktion, die im Nullpunkt holomorph ist. Dies zeigt, dass der Koeffizient der Laurentreihen-Entwicklung im Nullpunkt zum Exponenten -1 gleich 1 ist, und wir erhalten $\mathrm{res}_0(f) = 1$. Genauso erhält man $\mathrm{res}_1(f) = 1$. Der Residuensatz liefert also

$$\int_{\partial B_2(0)} f(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i \cdot \mathrm{res}_0(f) + 2\pi i \cdot \mathrm{res}_1(f) \quad = \quad 4\pi i.$$

zu (b) Eine Lösung der DGL ist eine dreimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ definiert auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varphi'''(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t))$ für alle $t \in I$.

zu (c) Das entsprechende System erster Ordnung ist gegeben durch $y' = F(y)$, wobei die Funktion $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ gegeben ist durch

$$F(x, y_0, y_1, y_2) \quad = \quad (y_1, y_2, f(x, y_0, y_1, y_2)).$$

Ist φ eine Lösung der DGL dritter Ordnung, dann ist $(\varphi, \varphi', \varphi'')$ eine Lösung des Systems. Ist umgekehrt $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ eine Lösung des Systems, dann ist φ_0 eine Lösung der DGL dritter Ordnung.

zu (d) Die DGL muss die Form $y' = f(x)g(y)$ haben, mit stetigen Funktionen, die auf offenen Intervallen $I, J \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind. Man bestimmt zunächst Stammfunktionen F und G von f und $1/g$ durch Integration. Anschließend bildet man die Umkehrfunktion H von G, indem man die Gleichung $x = G(y)$ nach y umstellt. Anschließend muss der Definitionsbereich von F noch so eingeschränkt werden, dass das Bild von F im Definitionsbereich von H enthalten ist. Es ist dann $\varphi = H \circ F$ eine Lösung. Wenn F und G so gewählt werden, dass $F(a) = G(b) = 0$ gilt, dann läuft die Lösung φ durch den Punkt (a, b).

Aufgabe 1

Definieren wir die Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ durch $\gamma(t) = e^{it}$, und definieren wir $f(z) = \frac{(-i)}{5z + \frac{3}{2}(z^2+1)}$, dann gilt

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{(-i)\;dz}{5z + \frac{3}{2}(z^2+1)} \quad = \quad \int_\gamma f(z)\;dz \quad = \quad \int_0^{2\pi} (f \circ \gamma)(t)\gamma'(t)\;dt \quad =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(-i)i \cdot e^{it}}{5e^{it} + \frac{3}{2}(e^{2it}+1)}\;dt \quad = \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + \frac{3}{2}(e^{it} + e^{-it})} \quad = \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + \frac{3}{2}(2\cos(t))} \quad = \quad \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3\cos(t)}.$$

Wir bestimmen die Singularitäten von f. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

$$5z + \tfrac{3}{2}(z^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \tfrac{10}{3}z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \tfrac{10}{3}z + \tfrac{25}{9} = \tfrac{16}{9} \quad \Leftrightarrow \quad (z + \tfrac{5}{3})^2 = (\tfrac{4}{3})^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (z + \tfrac{5}{3} - \tfrac{4}{3})(z + \tfrac{5}{3} + \tfrac{4}{3}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z + \tfrac{1}{3})(z+3) = 0.$$

Also sind $-\frac{1}{3}$ und -3 die einzigen Singularitäten von f. Weil $-\frac{1}{3}$ innerhalb und -3 außerhalb der Kreisscheibe $B_1(0)$ liegt, gilt $n(\gamma,-\frac{1}{3}) = 1$ und $n(\gamma,-3) = 0$. Mit Hilfe der Zerlegung

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{z+\frac{1}{3}} \cdot \frac{(-i)}{\frac{3}{2}(z+3)}$$

bestimmen wir das Residuum im Punkt $-\frac{1}{3}$: Es gilt

$$\mathrm{res}_{(-\frac{1}{3})}(f) \quad = \quad \frac{(-i)}{\frac{3}{2}(-\frac{1}{3}+3)} \quad = \quad \frac{(-i)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}} \quad = \quad -\tfrac{1}{4}i.$$

Mit dem Residuensatz erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+3\cos(t)} \quad = \quad \int_{\partial B_1(0)} \frac{(-i)\ dz}{5z+\frac{3}{2}(z^2+1)} \quad =$$

$$2\pi i \cdot n(\gamma,-\tfrac{1}{3}) \cdot \mathrm{res}_{(-\frac{1}{3})}(f) + 2\pi i \cdot n(\gamma,-3)\cdot \mathrm{res}_{(-3)}(f) \quad = \quad 2\pi i \cdot (-\tfrac{1}{4}i) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\pi.$$

Aufgabe 2

zu (a) Sei $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vorgegeben. Gesucht wird eine Lösung φ von $y' = f(x)g(y)$ mit den Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + r^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y^2 + s^2$. Nach dem Lösungsverfahren aus der Vorlesung suchen wir zunächst Stammfunktionen F, G von f und $1/g$ mit $F(a) = G(b) = 0$. Für F erhalten wir durch Integration

$$F(x) \quad = \quad \int_a^x (t^2+r^2)\ dt \quad = \quad \left[\tfrac{1}{3}t^3 + r^2 t\right]_a^x \quad = \quad \left(\tfrac{1}{3}x^3 + r^2 x\right) - \left(\tfrac{1}{3}a^3 + r^2 a\right) \quad = \quad \tfrac{1}{3}(x^3-a^3) + r^2(x-a).$$

Wie man unmittelbar überprüft, ist $F'(x) = x^2 + r^2 = f(x)$ und $F(a) = 0$. Nun berechnen wir die Funktion G.

$$G(y) \quad = \quad \int_b^y \frac{1}{t^2+s^2}\ dt \quad = \quad \tfrac{1}{s}\int_b^y \frac{\frac{1}{s}\ dt}{(\frac{t}{s})^2+1} \quad = \quad \tfrac{1}{s}\int_{b/s}^{y/s} \frac{du}{u^2+1} \quad =$$

$$\left[\tfrac{1}{s}\arctan(u)\right]_{b/s}^{y/s} \quad = \quad \tfrac{1}{s}\left(\arctan\left(\frac{y}{s}\right) - b_0\right).$$

mit $b_0 = \arctan\left(\frac{b}{s}\right)$. Dann gilt

$$G'(y) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(\frac{y}{s})^2+1} = \frac{1}{y^2+s^2} \qquad \text{und} \qquad G(b) = 0.$$

Als nächstes bestimmen wir die Umkehrfunktion von G durch die Äquivalenzumformung

$$x = G(y) = \tfrac{1}{s}\left(\arctan(\tfrac{y}{s}) - b_0\right) \quad \Leftrightarrow \quad sx + b_0 = \arctan(\tfrac{y}{s}) \quad \Leftrightarrow$$

$$\tan(sx+b_0) = \tfrac{y}{s} \quad \Leftrightarrow \quad y = s\tan(sx+b_0).$$

Die Funktion $H(x) = s\tan(sx+b_0)$ ist also die Umkehrfunktion von G. Somit ist durch

$$\varphi(x) \quad = \quad (H\circ F)(x) \quad = \quad H\left(\tfrac{1}{3}(x^3-a^3) + r^2(x-a)\right) \quad = \quad s\tan\left(\tfrac{s}{3}(x^3-a^3) + r^2 s(x-a) + b_0\right)$$

eine Lösung der DGL gegeben. Die Funktion φ verläuft tatsächlich durch den Punkt (a,b), denn es gilt

$$\varphi(a) \quad = \quad s\tan(b_0) \quad = \quad s\tan\left(\arctan(\tfrac{b}{s})\right) \quad = \quad s\cdot\tfrac{b}{s} \quad = \quad b.$$

zu (b) Sei $(a,b) \in D$ vorgegeben (mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $|b| < 1$). Gesucht wird eine Lösung φ von $y' = f(x)g(y)$ mit den Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(y) = 1 - y^2$ durch den Punkt (a,b). Die Stammfunktionen F von f ist gegeben durch

$$F(x) \quad = \quad \int_a^x \frac{dt}{t} \quad = \quad \ln(x) - \ln(a).$$

Um eine Stammfunktion von $1/g$ zu ermitteln, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Es gilt

$$\frac{1}{g(y)} \quad = \quad \frac{1}{1-y^2} \quad = \quad \frac{\frac{1}{2}}{1-y} + \frac{\frac{1}{2}}{1+y}$$

also ist

$$G(y) \quad = \quad \left[-\tfrac{1}{2}\ln(1-t) + \tfrac{1}{2}\ln(1+t)\right]_b^y \quad =$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln(1-y) + \tfrac{1}{2}\ln(1+y) + \tfrac{1}{2}\ln(1-b) - \tfrac{1}{2}\ln(1+b) \quad = \quad -\tfrac{1}{2}\ln(1-y) + \tfrac{1}{2}\ln(1+y) + b_0$$

$$= \quad \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + b_0$$

eine Stammfunktion, mit $b_0 = \frac{1}{2}\ln(1-b) - \frac{1}{2}\ln(1+b)$. Man überprüft unmittelbar, dass $G'(y) = g(y)^{-1}$ und $G(b) = 0$ erfüllt ist. Die Äquivalenzumformung

$$x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + b_0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x-b_0) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{2(x-b_0)} = \frac{1+y}{1-y} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2(x-b_0)}(1-y) = 1+y \quad \Leftrightarrow \quad e^{2(x-b_0)} - 1 = y(1+e^{2(x-b_0)}) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{e^{2(x-b_0)}-1}{e^{2(x-b_0)}+1}$$

zeigt, dass $H(x) = \frac{e^{2(x-b_0)}-1}{e^{2(x-b_0)}+1}$ eine Umkehrfunktion von G ist. Für $z = \ln(x) - \ln(a)$, dann gilt

$$e^{2(z-b_0)} \quad = \quad e^{2(\ln(x)-\ln(a)-b_0)} \quad = \quad e^{2(\ln(x)-\ln(a)-1/2\ln(1-b)+1/2\ln(1+b)} \quad = \quad \frac{1+b}{1-b}\cdot\frac{x^2}{a^2} \quad = \quad kx^2$$

mit $k = \frac{1+b}{(1-b)a^2}$. Somit ist durch

$$\varphi(x) \quad = \quad (H \circ F)(x) \quad = \quad H(\ln(x) - \ln(a)) \quad = \quad \frac{kx^2-1}{kx^2+1}$$

eine Lösung von $y' = f(x)g(y)$ gegeben. Diese Lösung läuft durch den Punkt (a,b), denn es gilt

$$\varphi(a) \quad = \quad \frac{\frac{1+b}{1-b}-1}{\frac{1+b}{1-b}+1} \quad = \quad \frac{1+b+b-1}{1+b+1-b} \quad = \quad \frac{2b}{2} \quad = \quad b.$$

Aufgabe 3

zu (a) Die höchste in der DGL vorkommende Ableitung von y ist eine zweite Ableitung, also ist $n = 2$. Der maximale Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}^3$, und die zugehörige Funktion des Systems ist gegeben durch $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t, y_0, y_1) \mapsto -g$.

zu (b) Das System lautet $y_0' = y_1$, $y_1' = -g$. Die zum System gehörende Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch $(t, y_0, y_1) \mapsto (y_1, -g)$.

zu (c) Die zum System $y' = \tilde{f}(x, y)$ äquivalente Integralgleichung lautet

$$\varphi(x) \quad = \quad \int_0^x \tilde{f}(t, \varphi(t)) \; dt.$$

Für die zweite Komponente der Lösung erhalten wir

$$\varphi_1(x) \quad = \quad \varphi_1(0) + \int_0^x \tilde{f}_1(t, \varphi(t)) \; dt \quad = \quad v_0 + \int_0^x (-g) \; dt \quad = \quad v_0 - gx.$$

Die erste Komponente erhält man nun durch die Rechnung

$$\varphi_0(t) \quad = \quad \varphi_0(0) + \int_0^x \tilde{f}_0(t, \varphi(t)) \; dt \quad = \quad x_0 + \int_0^x \varphi_1(t) \; dt \quad = \quad x_0 + \int_0^x (v_0 - gt) \; dt \quad =$$

$$x_0 + \left[v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \right]_0^x \quad = \quad x_0 + v_0 x - \tfrac{1}{2} g x^2.$$

Die Lösung der DGL 2. Ordnung ist nun gegeben durch $\psi(x) = \varphi_0(x) = x_0 + v_0 x - \frac{1}{2} g x^2$.