Funktionentheorie, Lebesguetheorie und Gewöhnliche DGL

— Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Es gibt hebbare Singularitäten, Polstellen und wesentliche Singularitäten. Hebbar wird eine Singularität genannt, wenn die Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung der Singularität beschränkt ist. Man nennt eine isolierte Singularität a eine Polstelle von f, wenn $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$ gilt. Eine isolierte Singularität, die weder hebbar noch eine Polstelle ist, haben wir wesentliche Singularität genannt.

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Koeffizienten in der Laurentreihen-Entwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n$ von f um die Singularität a. Die isolierte Singularität a ist hebbar genau dann, wenn $a_k = 0$ für alle $k \in Z$ mit $k < 0$ gilt. Um eine Polstelle der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ handelt es sich genau dann, wenn $a_{-n} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -n$ gilt. Die Stelle a ist eine wesentliche Singularität, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ gilt.

zu (b) Die Funktion $f(z) = z$ hat in 0 und 1 eine hebbare Singularität (offensichtlich ist die Funktion beispielsweise in der gemeinsamen Umgebung $B_2(0)$ der beiden Punkte betragsmäßig durch 2 beschränkt), somit gilt $\mathrm{res}_0(f) = \mathrm{res}_1(f) = 0$. Die Funktion $g(z) = \frac{1}{z}$ hat in 1 eine hebbare Singularität (sie ist beispielsweise auf $B_{\frac{1}{2}}(1)$ betragsmäßig durch 2 beschränkt), also ist $\mathrm{res}_1(g) = 0$. In 0 hat sie die Laurentreihen-Entwicklung $g(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$ mit $a_{-1} = 1$ und $a_k = 0$ für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, somit gilt $\mathrm{res}_0(g) = 1$. Die Funktion $h(z) = \frac{1}{z^2}$ hat in 1 ebenfalls eine hebbar Singularität (betragsmäßig auf $B_{\frac{1}{2}}(1)$ durch 4 beschränkt). Die Laurentreihen-Entwicklung ist $h(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k z^k$ mit $b_{-2} = 1$ und $b_k = 0$ fü $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, also gilt $\mathrm{res}_0(h) = 0$. Für die Funktion $r(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ findet man mit Lemma 6.3 die Werte $\mathrm{res}_0(r) = 1$ und $\mathrm{res}_1(r) = -1$.

zu (c) Hat f in a eine Polstelle der Ordnung n, dann besitzt, wie wir im Beweis von Satz 5.10 gesehen haben, die Funktion $z \mapsto f(z)^{-1}$ in a eine hebbare Singularität, und die holomorphe Fortsetzung dieser Funktion hat in a eine Nullstelle der Ordnung n. Hat f umgekehrt in a eine Nullstelle der Ordnung n, dann besizt $z \mapsto f(z)^{-1}$ in a eine Polstelle der Ordnung n. Dies erkennt man daran, dass man Proposition 4.2 anwendet und von der dort unter (iii) angegebenen den Kehrwert bildet.

zu (d) Sei $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ die Laurentreihen-Entwicklung von f im Nullpunkt. Dann ist die Laurentreihen-Entwicklung von f' in null durch $f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} n a_n z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ gegeben. Es existiert also kein z^{-1}-Term. Dies zeigt, dass das Residuum von f im Nullpunkt gleich null ist, und dass f' in 0 auch keine Polstelle der Ordnung 1 besitzen kann. Eine Polstelle zweiter Ordnung ist durchaus möglich, wie man am Beispiel $f(z) = z^{-1}$ sieht.

Aufgabe 1

zu (a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1-i| < 1$ gilt auf Grund der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1-i+i} = \frac{1}{i+z-1-i} = \frac{(-i)}{1+(-i)(z-1-i)} =$$

$$\frac{(-i)}{1-i(z-1-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i) i^n (z-1-i)^n.$$

Es folgt

$$f(z) = (z-i-1)^{-3} \cdot \frac{1}{z-1} = (z-i-1)^{-3} \sum_{n=0}^{\infty} (-i) i^n (z-1-i)^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-i) i^n (z-1-i)^{n-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} (-i) i^{n+3} (z-1-i)^n.$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{z-1}$ konvergiert auf $B_1(1+i)$, somit ist die Laurentreihen-Entwicklung von f auf $K_{0,1}(1+i)$ konvergent. Nehmen wir an, dass die Laurentreihe auf $K_{0,r}(1+i)$ für $r > 1$ konvergiert. Dann wäre der Punkt 1 im Kreisring enthalten, f also in den Punkt 1 holomorph fortsetzbar und somit in einer Umgebung von 1 beschränkt. Aber für $z \to 1$ ist der Faktor $(z-i-1)^{-3}$ beschränkt und ungleich Null, während der Betrag von $(z-1)^{-1}$ gegen Unendlich geht. Es gilt also $\lim_{z \to 1} |f(z)| = +\infty$. Dies zeigt, dass der Kreisring $K_{0,1}(1+i)$ bereits maximal gewählt ist.

Um die Laurentreihen-Entwicklung von f im Punkt 1 zu bestimmen, definieren wir auf $\mathbb{C} \setminus \{1+i\}$ die Funktion $g(z) = \frac{1}{z-1-i}$. Für jedes $z \in B_1(1+i)$ gilt auf Grund der Konvergenz der geometrischen Reihe

$$g(z) = \frac{1}{(-i)+z-1} = \frac{i}{1+i(z-1)} = \frac{i}{1-(-i)(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} i(-i)^n (z-1)^n.$$

Durch bilden der komplexen Ableitungen erhalten wir

$$g'(z) = -\frac{1}{(z-1-i)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} in(-i)^n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} i(n+1)(-i)^{n+1}(z-1)^n$$

$$g''(z) = \frac{2}{(z-1-i)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} in(n+1)(-i)^{n+1}(z-1)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i(n+1)(n+2)(-i)^{n+2}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)(n+1)(n+2)(-i)^n (z-1)^n$$

Es folgt

$$\frac{1}{(z-1-i)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2}i)(n+1)(n+2)(-i)^n (z-1)^n$$

und somit

$$f(z) = (z-1)^{-1} \cdot \frac{1}{(z-1-i)^3} = (z-1)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2}i)(n+1)(n+2)(-i)^n (z-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2}i)(n+1)(n+2)(-i)^n (z-1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-\tfrac{1}{2}i)(n+2)(n+3)(-i)^{n+1}(z-1)^n$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-\tfrac{1}{2})(n+2)(n+3)(-i)^n (z-1)^n$$

Weil die Potenzreihe der Funktionen g, g' und g'' auf $B_1(1)$ konvergiert, ist die Laurentreihen-Entwicklung von f auf $K_{0,1}(1)$ gültig. Dass f auf keinem Kreisring der Form $K_{0,r}(1)$ mit $r > 1$ durch diese Laurentreihe dargestellt werden kann, folgt wie im ersten Fall aus der Tatsache $\lim_{z \to 1+i} |f(z)| = +\infty$.

Aufgabe 2

zu (a) Setzen wir $g(z) = z^3 - 5z + 6i$, dann gilt $g(i) = 0$. Durch Polynomdivision erhalten wir die Zerlegung $g(z) = (z^2 + iz - 6)(z - i)$. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ gilt also

$$\tilde{f}(z) = \frac{(z^2 + iz - 6)(z - i)}{(z - i)(z + i)} = \frac{z^2 + iz - 6}{z + i}.$$

Also ist durch $\tilde{f}(z) = \frac{z^2+iz-6}{z+i}$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ gegeben. Diese hat im Punkt i den Wert

$$\tilde{f}(i) = \frac{i^2 + i \cdot i - 6}{i + i} = \frac{(-8)}{2i} = 4i.$$

zu (b) Die Ableitung der Funktion $g(z) = e^z - 1$ im Nenner ist gegeben durch $g'(z) = e^z$. Aus $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1 \neq 0$ folgt, dass g in 0 eine einfache Nullstelle besitzt. Nach (2.31) gibt es in einer Umgebung V von 0 eine holomorphe Funktion $h : V \to \mathbb{C}$ mit $h(z) \neq 0$ und $g(z) = zh(z)$ für alle $z \in V$. Es folgt $f(z) = z^{-1}h(z)^{-1}$ für alle $z \in V$. Dies zeigt laut Definition, dass f in 0 eine Polstelle 1. Ordnung besitzt.

zu (c) Die Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $z_n = \frac{1}{2\pi in}$ und $z'_n = \frac{1}{n}$ konvergieren offenbar beide gegen Null. Wegen

$$f(z_n) = e^{2\pi in} = 1 \quad \text{und} \quad f(z'_n) = e^n$$

gilt $\lim_n f(z_n) = 1$ und $\lim_n f(z'_n) = +\infty$. Dies zeigt, dass f weder in einer Umgebung von 0 beschränkt ist noch die Bedingung $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$ erfüllt. Also liegt im Punkt 0 eine wesentliche Singularität vor. Durch Einsetzen in die Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir außerdem

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, z^{-n}.$$

Dies zeigt, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Laurentkoeffizienten durch $a_{-n} = \frac{1}{n!}$ gegeben sind. Insbesondere ist das Residuum im Punkt 0 gegeben durch $a_{-1} = 1$.

Aufgabe 3

Sei $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - a)^k$ die Laurentreihenentwicklung von f in einer offenen Umgebung V von a. Dann besitzt die Funktion g auf V die Darstellung

$$g(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z - a)^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}(z - a)^k.$$

Für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ ergibt ℓ-faches Ableiten

$$g^{(\ell)}(z) = \sum_{k=\ell}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-\ell+1) \cdot a_{k-n}(z-a)^{k-\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+\ell) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot a_{k+\ell-n}(z-a)^k.$$

Für $\ell = n - 1$ erhalten wir insbesondere

$$g^{(n-1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k + n - 1) \cdot \ldots \cdot (k + 1) \cdot a_{k-1}(z - a)^k$$

und somit $g^{(n-1)}(a) = (n-1)!a_{-1}$, was zu $a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)$ umgestellt werden kann. Dabei ist a_{-1} nach Lemma 6.3 das Residuum von f im Punkt a.