

Lösung Globalübungsblatt 11

Aufgabe 1 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$

gesucht: Laurentreihen-Entwicklungen von f auf

(a) $R_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - i| < 2\} = K_{0,2}(i)$ bzw.

(b) $R_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\} = K_{1,\infty}(0)$

geom. Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < 1$

zu (a) Sei $z \in R_1$ $f(z) = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{z+i}$

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i) + 2i} = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2i}(z-i) + 1} =$$

$n=0$ $1-\alpha$ Für $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| < 1$

$$\frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2i}(z-i)\right)} = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2i}(z-i)\right)^n =$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i(z-i)\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (z-i)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = - \frac{1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (z-i)^n =$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+1} (z-i)^{n-1} = - \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}i\right)^{n+2} (z-i)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-i)^n \quad \text{mit } a_n = 0 \text{ für } n \leq -2, a_n = -\left(\frac{1}{2}i\right)^{n+2} \text{ für } n \geq -1$$

Aus $z \in R_1$ folgt $|z-i| < 2$ und $|\alpha| = \left|-\frac{1}{2i}(z-i)\right| < 1$
Dies zeigt, dass die Reihe in z konvergiert.

zu (6) Sei $z \in \mathbb{R}_2$, d.h. $|z| > 1$, und $w = \frac{1}{z}$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{w^2} + 1} = \frac{w^2}{1 + w^2} =$$

$$w^2 \cdot \frac{1}{1 - (-w^2)} = w^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-w^2)^n =$$

$$\stackrel{=:\alpha}{=} w^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n} = z^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-2(n-1)-2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1)^{1-n} z^{2n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

mit $a_k = (-1)^{1-n}$ falls k gerade, $k=2n$, $n \leq -1$

Ang

$\cos(\pi/2)$

$= 1e$

e^{-b}

$\Rightarrow$ Die

lt. An

$\Rightarrow \pm \frac{1}{z}$

Also ist

$z \mapsto 1/z$

Singulär

und $a_k = 0$ falls k ungerade oder $k \geq 0$.
 Aus $|z| > 1$ folgt $|w| < 1$ und $|\alpha| = |-w^2| < 1$.
 Also konvergiert die Reihe in z . $\square$

Aufgabe 2 $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| < \pi\}$
 $= \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Re}(z) < \pi\}$

$$f(z) = \frac{1}{(z + \frac{1}{2}\pi) \cos(z)} \quad \text{meromorphe Fkt}$$

zu (a) gesucht: Singularitäten von f und der jeweilige Typ

Bestimme zunächst die Nullstellen des komplexen Kosinusfkt. $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ in U

$$\begin{aligned} \text{Arg } z = a+ib \text{ ist Nullstelle mit } b \neq 0. \\ \cos(z) = 0 \Rightarrow |e^{iz}| = |e^{-iz}| \Rightarrow |e^{i(a+ib)}| \\ = |e^{-i(a+ib)}| \Rightarrow |e^{-b+ia}| = |e^{b-ia}| \Rightarrow \\ e^{-b} = e^b \quad \Downarrow \text{ da } e^x > 1, e^x < 1 \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die einzige Nullstellen von $\cos(z)$ liegen in $\mathbb{R}$,
 lt. Analysis eine Vorzeichen sind dies $\frac{1}{2}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm \frac{1}{2}\pi$ einzige Nullstellen von $\cos(z)$ in U

Also ist $\{\pm \frac{1}{2}\pi\}$ die Nullstellenmenge der Nennerfkt.

$z \mapsto (z + \frac{1}{2}\pi) \cos(z)$, und dies sind die einzigen
 Singularitäten von f .

1) -2

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$$

≤ -1

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \cos'\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi$ ist Nullstelle 1. Ordnung von $\cos(z)$

$\Rightarrow \exists$ offene Umg. $V \subseteq U$ von $\frac{1}{2}\pi$ und eine nullstellenfreie, hol. Fkt. $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = (z - \frac{1}{2}\pi) g(z) \quad \forall z \in V$

$$\Rightarrow f(z) = (z - \frac{1}{2}\pi)^{-1} \frac{1}{(z - \frac{1}{2}\pi)g(z)} \quad \text{wobei } \frac{1}{(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi)g(\frac{1}{2}\pi)} \neq 0$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi$ ist Polstelle 1. Ordnung von f

$$\cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = 0, \cos'\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -(-1) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\pi$ ist Nullst. 1. Ordn. von $\cos(z)$

$\Rightarrow \exists$ offene Umg. $V_1 \subseteq U$ von $-\frac{1}{2}\pi$ und eine nullstellenfreie hol. Fkt. $g_1: V_1 \rightarrow \mathbb{C}$

complexen
) in U

$$\text{mit } \cos(z) = (z + \frac{1}{2}\pi) g_1(z) \quad \forall z \in V_1$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z + \frac{1}{2}\pi) \cos(z)} = \frac{1}{(z + \frac{1}{2}\pi) (z + \frac{1}{2}\pi) g_1(z)} =$$

$$(z + \frac{1}{2}\pi)^{-2} \frac{1}{g_1(z)} \quad \forall z \in V_1, \text{ wobei } g_1(-\frac{1}{2}\pi) \neq 0$$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\pi$ ist Polstelle 2. Ordnung von f

[$f: G \rightarrow \mathbb{C}$ hol auf $G \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in G$ mit $f^{(k)}(a) = 0$ für $0 \leq k < n$, $f^{(n)}(a) \neq 0 \Rightarrow a$ Nullstelle n -ter Ordnung von f]

zu (b) Bestimmung der Residuen

Bestimmung der Residuen

(1) Residuum im Punkt $\frac{1}{2}\pi$

Pol 1. Ordnung $\Rightarrow \exists$ offene Umg. V von $\frac{1}{2}\pi$ und eine hol. Fkt. $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - \frac{1}{2}\pi)^{-1} g(z) \quad \forall z \in V \setminus \{\frac{1}{2}\pi\}$ und $g(\frac{1}{2}\pi) \neq 0$. Lt. VL gilt dann $\text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(f) = g(\frac{1}{2}\pi)$.

$$\text{Es gilt } g(z) = f(z)(z - \frac{1}{2}\pi) = \frac{z - \frac{1}{2}\pi}{(z + \frac{1}{2}\pi) \cos(z)} \quad \forall z \in V \setminus \{\frac{1}{2}\pi\}$$

Als hol. Fkt. ist g stetig in $\frac{1}{2}\pi$.

$$\rightarrow g(\frac{1}{2}\pi) = \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi \\ (x \in \mathbb{R})}} \frac{x - \frac{1}{2}\pi}{(x + \frac{1}{2}\pi) \cos(x)} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \frac{1}{\cos(x) + (x + \frac{1}{2}\pi)(-\sin(x))}$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot (-1)} = -\frac{1}{\pi} \Rightarrow \text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(f) = -\frac{1}{\pi}$$

(2) Residuum in Punkt $-\frac{1}{2}\pi$

[Tut.-aufg 3 a Polstelle n-ter Ordn. von f

$$f(z) = (z-a)^{-n} g(z) \Rightarrow \operatorname{res}_a(f) = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(a)]$$

$$\text{hier: } \frac{1}{(z+\frac{1}{2}\pi)\cos(z)} = f(z) = (z+\frac{1}{2}\pi)^{-2} g(z) \quad \forall z \in V \setminus \{-\frac{1}{2}\pi\}$$

wobei V klein. offene Umg von $-\frac{1}{2}\pi$

$$\Rightarrow g(z) = \frac{(z+\frac{1}{2}\pi)^2}{(z+\frac{1}{2}\pi)\cos(z)} = \frac{z+\frac{1}{2}\pi}{\cos(z)} \quad \forall z \in V \setminus \{-\frac{1}{2}\pi\}$$

$$\Rightarrow g'(z) = \frac{\cos(z) + (z+\frac{1}{2}\pi)\sin(z)}{\cos(z)^2}$$

Mit g ist auch g' holomorph, insb. stetig in $-\frac{1}{2}\pi$

$$\Rightarrow g'(-\frac{1}{2}\pi) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos(x) + (x+\frac{1}{2}\pi)\sin(x)}{\cos(x)^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} \frac{-\sin(x) + \sin(x) + (x + \frac{1}{2}\pi) \cos(x)}{2 \cos(x) (-\sin(x))}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} - \frac{(x + \frac{1}{2}\pi) \cos(x)}{2 \cos(x) \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} - \frac{x + \frac{1}{2}\pi}{2 \sin(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{res}_{-\frac{1}{2}\pi}(f) = 0$$

zu (c) Frage: Hat f eine komplexe Stammfkt. auf $U_1 = U \setminus \{\pm \frac{1}{2}\pi\}$?

Betrachte das Kurvenintegral $\int_{\partial B_r(\frac{1}{2}\pi)} f(z) dz$, wobei $r \in \mathbb{R}^+$

hinr. klein, so dass $\overline{B_r(\frac{1}{2}\pi)} \subseteq U \setminus \{\pm \frac{1}{2}\pi\}$ Residuensatz $\Rightarrow$

$$\int_{\partial B_r(\frac{1}{2}\pi)} f(z) dz = 2\pi i \cdot n(\partial B_r(\frac{1}{2}\pi), \frac{1}{2}\pi) \cdot \operatorname{res}_{\frac{1}{2}\pi}(f) =$$

$$2\pi i \cdot \operatorname{res}_{\frac{1}{2}\pi}(f) = 2\pi i \left(-\frac{1}{\pi}\right) = -2i \neq 0$$

Hätte f auf U_1 eine komplexe Stammfkt.,
dann müsste $\int_{\partial B_r(\frac{1}{2}\pi)} f(z) dz$ als geschlossenes
Kurvenintegral null sein. Also hat f
keine solche Stammfkt.

Aufg

$\gamma =$

η

Allgem

$k \in \mathbb{Z}$

$t \mapsto$

$z_n(a)$

Residuen

$\sum_{z \in$

Aufgabe 2

zu (d) Allgemein gilt: Ist $a \in \mathbb{C}$ und sind f, g Funktionen mit einer isolierten Singularität in a , dann ist $\text{res}_a(f+g) = \text{res}_a(f) + \text{res}_a(g)$. denn: Sind $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ und $g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n$ die Laurentreihen-Entw. von f und g um a , dann ist

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (a_n + b_n)(z-a)^n$$

die Laurentreihen-Entw. von $f+g$. $\Rightarrow \text{res}_a(f+g) = a_{-1} + b_{-1} = \text{res}_a(f) + \text{res}_a(g)$

Sei nun $c \in \mathbb{C}$ und $h(z) = f(z) + c(z - \frac{1}{2}\pi)^{-1}$. $\Rightarrow \text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(h) = \text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(f) + \text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(c(z - \frac{1}{2}\pi)^{-1}) = -\frac{1}{\pi} + c$. Es gilt also $\text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(h) = 0$, wenn wir $c = \frac{1}{\pi}$ setzen.

Um nun zu zeigen, dass h eine komplexe Stammfkt. auf U_1 hat, genügt es nach Folgerung 2.10 nachzuweisen, dass $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U_1 gilt. Tatsächlich erhalten wir für jeden solchen Weg durch Anwendung des Residuensatzes

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} h(z) dz &= 2\pi i \cdot n(\gamma, -\tfrac{1}{2}\pi) \text{res}_{-\frac{1}{2}\pi}(h) + 2\pi i \cdot n(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi) \text{res}_{\frac{1}{2}\pi}(h) \\ &= 2\pi i \cdot n(\gamma, -\tfrac{1}{2}\pi) \cdot 0 + 2\pi i \cdot n(\gamma, \tfrac{1}{2}\pi) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

$$\gamma = \partial B_2(0) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto 2e^{it}$$

$$\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto i + e^{-it}$$

Allgemein gilt $n(\gamma, z) = k$ falls

$$k \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{C}, \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \\ t \mapsto a + r e^{ikt}, z \in B_r(a)$$

$$\text{zu (a)} \quad \int_{\gamma} \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2} dz = ?$$

Residuensatz $\Rightarrow$ Das Integral ist gleich

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} 2\pi i n(\gamma, z) \operatorname{res}_z(f), \quad f(z) = \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2}$$

einige Singularität : 0

Laurentreihen-Entw um den Nullpunkt

$$f(z) = z^{-2} (\exp(i z^2) - 1) = z^{-2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i z^2)^n}{n!} - 1 \right)$$
$$= -z^{-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} z^{2n-2}$$

Der Laurentkoeff. a_{-1} (= Vorfaktor von z^{-1}) ist gleich null. $\rightarrow \operatorname{res}_z(f) = 0$

Somit ist auch das Kurvenintegral gleich 0.

Aufgabe 3

zu (b) Hier ist i die einzige Singularität der Funktion. Die Laurentreihe-Entw.

von $g(z) = (z-i)^{-3} e^z$ erhält man durch die Rechnung

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-i)^{-3} e^i e^{z-i} = (z-i)^{-3} e^i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^i}{n!} (z-i)^{n-3} \\ &= \sum_{n=-3}^{\infty} \frac{e^i}{(n+3)!} (z-i)^{n-3} \end{aligned}$$

An dieser Form kann $\operatorname{res}_i(g) = \frac{1}{2} e^i$ abgelesen werden. (Dies ist der Koeffizient von $(z-i)^{-1}$.) Alternativ kann man das Residuum auch mit der Formel aus

Trt.-aufg. 3 berechnen. Es ist $g(z) = (z-i)^{-3} u(z)$ mit $u(z) = e^z$, also $u''(z) = e^z$ und $\operatorname{res}_i(g) = \frac{1}{(3-1)!} u''(i) = \frac{1}{2} e^i$.

Da der Weg γ den Kreis vom Radius 1 im Uhrzeigersinn durchläuft, gilt $n(\gamma, i) = -1$. Der Residuensatz liefert nun

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, i) \cdot \operatorname{res}_i(g) = 2\pi i \cdot (-1) \cdot \frac{1}{2} e^i = -\pi i e^i.$$

zu (c) Die Funktion $h(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat 0 als einzige Singularität.

$$\text{Es gilt } h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{1}{(-n)!} z^n$$

Daran kann $\operatorname{res}_0(h) = \frac{1}{(-(-1))!} = 1$ abgelesen werden. Mit der Umlaufzahl $n(\gamma, 0) = 1$ erhalten wir

$$\int_{\gamma} h(z) dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, 0) \cdot \operatorname{res}_0(h) = 2\pi i \cdot 1 \cdot 1 = 2\pi i. \quad \square$$